6ª Giornata Nazionale di Analisi Non Standard

Ruggero Ferro

Aspetti non standard non riducibili a una trattazione classica

1. Una domanda provocatoria.

Domanda rivolta agli studenti di matematica della Sorbona.

C'è qualcosa che è maggiore di zero e minore di tutti i numeri del tipo $1/n$ con n naturale positivo?

Domanda equivoca:

A) cosa vuol dire esattamente?

B) dove cercare quel qualcosa?

A titolo informativo, il 60% degli studenti intervistati ha risposto no e il 40% sì.

2. L'ambiente della domanda

A) Conosciamo i numeri naturali e sappiamo pure dividere un intervallo in un numero naturale positivo di parti, ma come vediamo la <u>totalità</u> delle grandezze $1/n$?

I naturali non finiscono mai, come può esserci la loro totalità?

C'è poiché s'immagina e considera l'insieme di tutti i numeri naturali: è un insieme infinito attuale (un qualcosa con infiniti elementi), il più piccolo infinito, i cui elementi sono tutti finiti (Cantor)

Cosa vuol dire finito (e infinito)?

Che si può arrivare a considerare tutti gli elementi dell'insieme, uno per uno, dato un tempo sufficiente.

Chi garantisce che non ci siano naturali cui non si può arrivare, ad esempio così grandi che per forza si perde il conto nel determinarli?

In tal caso non sono naturali, direbbe Peano. Perché no?

3. Dove cercare le soluzioni.

B) | ||| | | | | |
    0     $1/n$ 1/4   1/3   1/2   1
      ______________________________________/

Questa figura vorrebbe rappresentare la situazione della domanda: "C'è qualcosa tra 0 tutti gli $1/n$ con n naturale positivo?"

Qualcosa di che tipo, dove cercarlo? Non tra i razionali, ma in un continuo! Che è un continuo?

Qualcosa senza interruzioni o buchi. Sì, circa.

Tipico esempio di continuo è la retta.

Com'è fatta la retta?

Ci s'immagina che per ogni suo punto <u>non</u> ci sia un prossimo senza alcun altro punto tra i due.

Per vedere meglio come è fatta la retta nei pressi dell'origine (o analogamente di un qualsiasi altro punto) ingrandiamola (zoom in $\times n$): i vari punti si saranno allontanati, ma la retta appare immutata.

______________________|_________________________|______
                      0   1

zoom in $\times n$ ____________________|________________ ________|_____
                      0                         $1/n$

Sulla retta si possono individuare i punti di ascissa razionale, quelli cui si può giungere <u>contando</u> in quante parti viene divisa l'unità di misura e quante di queste parti vanno considerate.

Ma ci sono grandezze incommensurabili con l'unità di misura. Sicché questi punti non bastano: lasciano buchi!

Non si può misurare tutto contando.

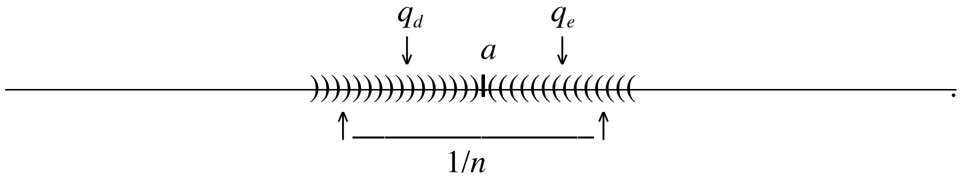
Però è utile e comodo misurare contando sia nelle applicazioni tecniche che nella vita quotidiana; per fare un bordo attorno a un tavolo tondo di un metro di diametro, nessuno va a comprare π metri di frangia!

Che fare?

Si può approssimare contando (con i razionali) quanto si vuole.

Cioè: per ogni numero naturale positivo n si possono trovare un'approssimazione razionale q_e per eccesso e un'approssimazione razionale q_d per difetto di una grandezza a da misurare tali che

$$q_e - q_d < 1/n$$



L'idea di determinare una grandezza mediante la totalità delle sue approssimazioni razionali è colta dalle sezioni di Dedekind sui razionali e dagli elementi separatori di ciascuna sezione.

4. Quanti elementi separatori?

Quante sono le sezioni di Dedekind sui razionali?

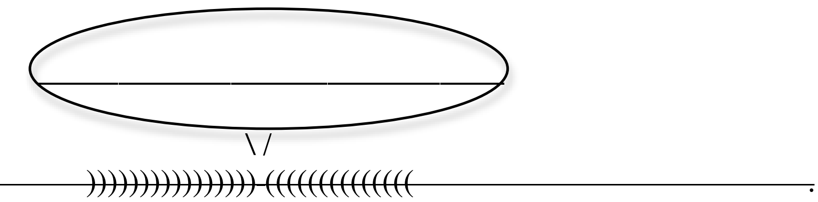
Una infinità strettamente maggiore di quella dei naturali (e dei razionali). Un'infinità con tanti elementi quanti sono i sottoinsiemi dei naturali.

Quanti elementi separatori deve avere una qualsiasi sezione di Dedekind?

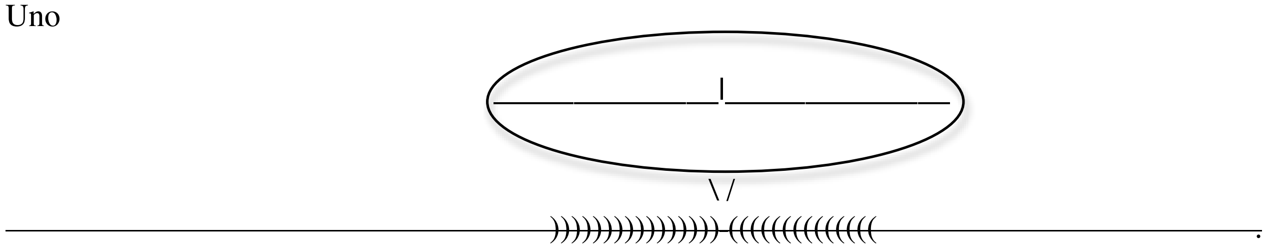
Nessuno, esattamente uno, molti?

La scelta della risposta a questa domanda corrisponde a visioni diverse di com'è fatta la retta.

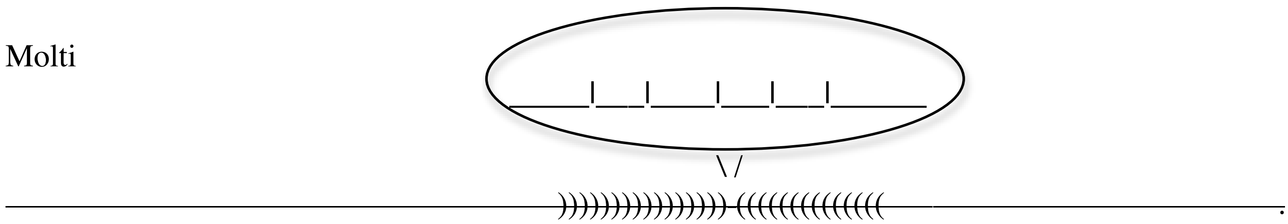
Nessuno



Uno



Molti



Per vedere solo gli elementi separatori e non i razionali delle classi inferiore e superiore di una sezione di Dedekind si deve ingrandire più di n volte per ogni naturale n, cioè usare uno zoom infinito, come si è fatto nelle figure precedenti.

Nel proporre ciò, si è già accettato che ci possano essere grandezze maggiori di tutti i naturali intesi.

Ciò è conseguenza ed è giustificato dell'aver accettato la totalità dei numeri naturali, che è indispensabile per introdurre le classiche sezioni di Dedekind, le classi di equivalenza di successioni di Cauchy e i reali: non è un caso che la definizione di numero reale arriva solo verso la fine dell'800 con Dedekind e Cantor.
Cerchiamo di analizzare le possibili risposte a quanti elementi separatori per ciascuna sezione di Dedekind sui razionali.

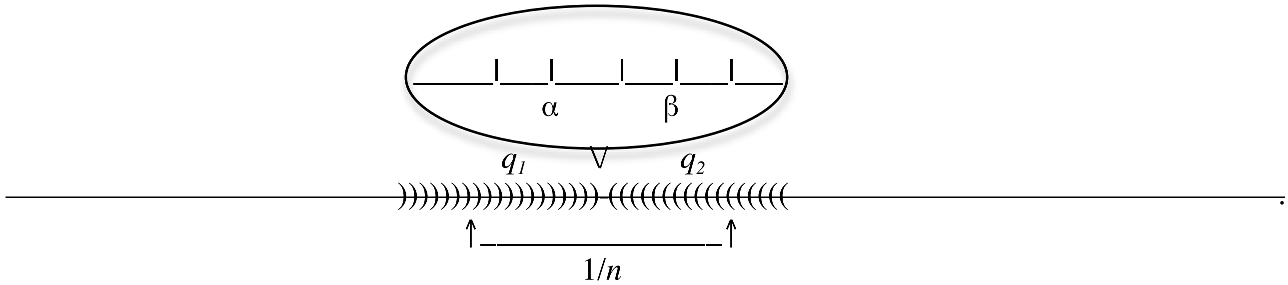
5. Nessun elemento separatore.
La scelta "nessuno" NON va bene per molte sezioni: quelle per le quali si sa determinare qualcosa che è elemento separatore della specifica sezione, ad esempio un razionale, o un elemento costruibile con riga e compasso, o alcuni trascendenti come π, e, o qualcos'altro.
Tali sezioni, però, sono una quantità numerabile, mentre la totalità delle sezioni sui razionali è una quantità più che numerabile, e potrebbe essere conveniente non accettare nessun elemento separatore per le altre sezioni. Si eviterebbero, così, i gravi problemi che procurano gli insiemi infiniti troppo grandi, pur riuscendo a considerare tutte le quantità che nascono da problemi della realtà. Ciò giustificherebbe questa scelta, ma … così rimangono, messi in evidenza, tutti i buchi (probabilmente inutilizzabili) indicati dalle sezioni di Dedekind sui razionali rimaste senza elemento separatore.

6. Almeno un elemento separatore per ciascuna sezione.
Con la scelta che la gran parte delle sezioni sia senza elemento separatore non si è colta alcuna nozione di continuità, sicché questa scelta non è conveniente tanto che non viene perseguita.
Pertanto, pur dovendo ingerire il rospo delle conseguenti difficoltà con la nozione d'infinito, conviene scegliere di voler chiudere tutti i buchi, cioè inventare almeno un elemento separatore per ogni sezione di Dedekind sui razionali.
D'accordo almeno uno, ma esattamente uno o più di uno?
A priori non si può decidere quale delle due soluzioni scegliere: entrambe sono invenzioni umane non contraddittorie (non c'è niente di meno reale dei numeri reali). Si tratta di vedere quali sono i pro e i contro di ciascuna scelta.

7. Un solo elemento separatore per ciascuna sezione.
La scelta di un solo elemento separatore sembra la più semplice.
Corrisponde all'invenzione dei numeri reali.
Chiude tutti i buchi in modo immediato.
Inoltre consente di separare un reale da un altro mediante un numero razionale: uno che distingua la sezione di Dedekind sui razionali che porta a un reale da quella che porta a un altro reale (densità dei razionali tra i reali).
Ancora, per ogni reale introdotto c'è un razionale maggiore di lui, (e quindi anche un naturale maggiore di lui), sicché, considerando i reciproci, per ogni reale positivo r c'è un naturale positivo m tale che $1/m<r$, e non ci possono essere reali positivi minori di tutti gli $1/n$. Questa è l'archimedeità dei reali.
Così, non ci sono reali positivi piccoli in assoluto, ma solo relativamente piccoli, cioè più piccoli di un certo altro reale.
Se la soluzione alla domanda posta agli studenti della Sorbona deve essere trovata tra i numeri reali, la risposta è no: non c'è nessun numero reale maggiore di 0 e minore di $1/n$ per ogni n numero naturale positivo (come avrebbero dovuto rispondere tutti, visto che nel corso di analisi matematica si insegnava proprio così).
Come mai il 40% degli studenti ha "sbagliato"?
Ci sono controindicazioni alla scelta che ogni sezione di Dedekind sui razionali abbia un solo elemento separatore?
L'ambito dei reali non coglie esattamente l'ambiente in cui il problema suggerisce di porsi?
Per rispondere alle ultime domande analizziamo cosa succede se si ammettono più elementi separatori per ciascuna sezione di Dedekind sui razionali.

8. Più elementi separatori per ciascuna sezione.

Ci siano due elementi separatori, α e β, di una specifica sezione di Dedekind sui razionali. Entrambi sono maggiori di tutti i razionali della classe inferiore e minori di tutti i razionali della classe superiore della sezione considerata, ma, poiché per ogni n naturale positivo ci sono elementi, uno q_1 in una classe e uno q_2 nell'altra, che differiscono per meno di $1/n$, si ha che la distanza tra α e β ($|\alpha-\beta|$) dovrà essere minore di $1/n$ per ogni n naturale positivo.



Così ci dovranno essere grandezze positive minori di $1/n$ per ogni n naturale positivo, ed è completamente giustificata la risposta del 40% degli studenti della Sorbona. Tali grandezze saranno chiamate infinitesimi positivi.

Introducendo più elementi separatori per ciascuna sezione si vuole ottenere un sistema numerico, cioè un sistema chiuso rispetto alle usuali operazioni che contenga sia i razionali sia gli infinitesimi, sicché s'inventerà pure quello che serve per giungere a ciò: gli *iperreali*.

Così ci saranno gli opposti degli infinitesimi positivi, che saranno detti *infinitesimi negativi*, e saranno maggiori di $-1/n$ per ogni n naturale positivo e minori di zero.

Ci saranno anche i reciproci degli infinitesimi positivi che saranno maggiori di ogni numero naturale, sicché saranno chiamati *infiniti positivi*, e gli opposti di questi saranno gl*i infiniti negativi* minori di $-n$ per ogni n naturale.

I nuovi numeri non infiniti verranno detti *finiti*. Inoltre si chiameranno *infinitesimi* tutti i numeri minori in valore assoluto di $1/n$ per ogni n naturale positivo, sicché anche 0 è un infinitesimo.

Si osservi che se ξ e μ sono infinitesimi allora anche ξ+μ è un infinitesimo.

Infatti fissato un qualsiasi numero naturale positivo n, se sia ξ che μ sono infinitesimi allora sono in modulo minori di tutti i reciproci dei naturali positivi e in particolare $|\xi|< 1/2n$ come pure $|\mu|< 1/2n$, sicché $|\xi+\mu|<|\xi|+|\mu|< (1/2n)+(1/2n) = 1/n$; ed, essendo n un qualsiasi naturale positivo, ξ+μ è un infinitesimo. Questa è l'unica dimostrazione che presenterò per mostrare quanto sono semplici le dimostrazioni adottando questo punto di vista, poiché anche le altre hanno difficoltà analoghe e le salto in quanto non aggiungerebbero niente alle considerazioni che si stanno sviluppando.

Dal risultato precedente segue che, per ogni naturale positivo k, anche $k\times\xi$ sarà un infinitesimo, e ci sono infiniti infinitesimi.

Siccome sommando infinitesimi si rimane tra gli infinitesimi, in questo senso si può dire che gli infinitesimi sono *piccoli in modo assoluto*.

Segue anche che sommando un infinitesimo a un elemento separatore di una sezione di Dedekind sui razionali si ottiene ancora un elemento separatore di quella sezione, sicché ogni sezione avrà infiniti elementi separatori.

Tra gli infiniti elementi separatori di una sezione può comparire al più un razionale: c'è se è una sezione che determina quel razionale.

Quindi gli elementi separatori non sono tra loro distinguibili mediante razionali, e altrettanto dicasi degli infinitesimi.

Diremo che due numeri iperreali α e β sono *infinitamente vicini* ($\alpha\approx\beta$) se la loro differenza è un infinitesimo. Ovviamente, ogni infinitesimo è infinitamente vicino a zero ($\xi\approx 0$).

La relazione tra gli iperreali finiti di essere infinitamente vicini è una relazione di equivalenza (), e le classi di equivalenza generate da questa relazione sono gli insiemi di elementi separatori di una stessa sezione di Dedekind sui razionali.

Per ciascuna di queste classi di equivalenza si può scegliere un particolare elemento che rappresenti la classe. Se nella classe c'è un razionale, si sceglie quello come rappresentante, altrimenti è del tutto indifferente quale elemento scegliere.
Poiché l'elemento scelto è unico per ogni sezione di Dedekind sui razionali, esso può essere considerato come il numero reale corrispondente a quella sezione.
La funzione che a ogni iperreale finito associa l'elemento scelto della sua classe di equivalenza (il reale che gli è infinitamente vicino) è detta funzione *parte standard* (o parte reale).
E' facile costruire tutta un'algebra che distingua i risultati delle operazioni in infinitesimi, finiti non infinitesimi o infiniti in base allo stesso tipo di classificazione degli elementi su cui si opera (ad esempio somma di infinitesimi è un infinitesimo, prodotto di un finito per un infinitesimo è un infinitesimo, eccetera). Analogamente si può esaminare la parte standard del risultato di operazioni partendo dalle parti standard degli elementi su cui si opera (ad esempio la parte standard di una somma è la somma delle parti standard, eccetera). I risultati di tale modo di procedere sono quelli ovvi e banalmente dimostrabili, se si tiene presente che ci sono casi in cui il risultato non è determinato dal solo tipo di elementi su cui si opera ma bisogna considerare gli stessi elementi singolarmente.
Ad esempio i *rapporti di infinitesimi* $\xi^2/\xi = \xi$, $\xi/\xi = 1$, $\xi/\xi^2 = 1/\xi$, con ξ infinitesimo non nullo, sono rispettivamente un infinitesimo, un finito non infinitesimo, e un infinito.
Mi sono dilungato un po' a esaminare cosa accade quando si scelgono più elementi separatori per ciascuna sezione di Dedekind sui razionali, perché è una scelta oggi poco conosciuta, addirittura spesso pensata contraddittoria; ma non lo è, a meno che non si vogliano aprioristicamente e immotivatamente escludere gli infinitesimi.
Però il nostro obiettivo era vedere se è più conveniente inventare un solo elemento separatore o infiniti elementi separatori per ciascuna sezione di Dedekind sui razionali.
Si potrebbe osservare che, anche se si ammettessero molti elementi separatori, questi sono assolutamente vicini, così vicini che la loro differenza è trascurabile, e tanto vale trascurarla fin dall'inizio.

9. Quale scelta?

Certo, a meno che non ci siano problemi e situazioni, anche della vita quotidiana, che richiedano quantità trascurabili per essere trattati in modo naturale e semplice.
Di fatto esistono tali situazioni! Newton e Leibniz se ne erano ben accorti, molto tempo prima che venisse precisato il concetto di numero reale, e usarono lo strumento degli infinitesimi per ottenere grandi risultati della matematica.
L'accusa di contraddittorietà rivolta ai loro metodi non è dovuta al fatto che potessero portare a delle contraddizioni, ma che la loro scelta non è compatibile con l'idea preconcetta e immotivata contro gli infiniti attuali, sicché non si possono inventare infinitesimi che portano a infiniti attuali.
La velocità istantanea è un esempio di una situazione convenientemente studiabile con numeri trascurabili.

10. Velocità istantanea.

Ciascuno ha esperienza di movimenti a diverse velocità istantanee.
La velocità istantanea può essere anche evidenziata fisicamente mediante il tubo di Pitot o il pendolo di Watt. Il primo inventato per misurare la velocità istantanea di un fluido, il secondo per regolare automaticamente con un effetto retroattivo la velocità di un macchinario rilevando la velocità istantanea di una sua componente.
Così la velocità istantanea c'è, è misurabile, e ha una sua consistenza fisica.
L'arcinota definizione della velocità istantanea come limite delle velocità media al tendere a zero dell'intervallo temporale, è un vero pugno nello stomaco. Eventualmente, in un moto, è lo spostamento globale che viene ottenuto come somma degli spostamenti istantanei, che, se non ci fossero questi, non ci sarebbe alcun spostamento.
Così tale arcinota "definizione" non può essere la definizione di velocità istantanea, casomai è un legame tra la velocità istantanea e la velocità media.

Ma come definire e rendere operativa la nozione di velocità istantanea in un certo momento, come confrontare diverse velocità istantanee?

Si misura lo spostamento in un instante, meglio si considera il rapporto ds/dt tra lo spostamento ds che avviene in un instante e la durata dt dell'istante stesso.

Ma, che è un istante?

Un tempuscolo assolutamente piccolo, non necessariamente di durata zero, ma più piccolo di ogni intervallo di tempo che possa essere concretamente apprezzato.

Si è in grado di apprezzare un intervallo non nullo di tempo limitato da specifici eventi, ed eventualmente parti di questo, suddividendolo in n parti uguali, n un naturale positivo, che, almeno teoricamente, può essere grande quanto si vuole.

Per essere assolutamente piccolo un intervallo di tempo deve essere minore di tutti gli intervalli apprezzabili, cioè deve essere un *intervallo infinitesimo*. (gli intervalli apprezzabili possono essere suddivisi in n parti tra loro uguali per ogni naturale positivo n ed essere ancora apprezzabili)

Ma gli infinitesimi non nulli sono tanti, infiniti; e misurando lo spostamento rettilineo che si sviluppa da un certo punto in un infinitesimo di tempo si otterrà in genere qualcosa di diverso da quanto avviene in un diverso infinitesimo di tempo.

Ma quello che interessa è il rapporto che c'è tra lo spostamento nell'intervallo di tempo e la durata dello stesso intervallo, chiamato rapporto incrementale, che dovrebbe essere un rapporto tra infinitesimi, il divisore infinitesimo non nullo.

Come si è visto, il risultato di un rapporto d'infinitesimi può essere un infinitesimo o una quantità finita non infinitesima, o un infinito.

Può succedere che i vari rapporti, corrispondenti a tutti i possibili intervalli infinitesimi non nulli di tempo, siano tutti finiti e infinitamente vicini tra loro. Sicché si può trascurare l'infinitesimo di differenza tra questi rapporti, per arrivare a considerare la loro classe di equivalenza. Questa può essere rappresentata dal numero reale che le appartiene.

Tale numero reale è la parte standard dei numeri della classe, e si può affermare che questo misura la velocità istantanea.

Si può asserire che: il moto che si considera è sufficientemente regolare (non è un susseguirsi momenti di urti rigidi quando non c'è velocità istantanea), tanto da avere velocità istantanea in un certo momento, esattamente se, partendo da quel momento, i vari rapporti incrementali rispetto a ogni possibile incremento infinitesimo non nullo di tempo sono finiti e tra loro infinitamente vicini, cioè hanno la stessa parte standard.

In tale situazione, trascurato il trascurabile, tutti quei rapporti incrementali forniscono lo stesso numero reale, che è la loro parte standard, e questo indicherà la velocità istantanea in quel momento.

Pertanto, una ragionevole definizione di velocità istantanea v_0 al momento t_0 di un moto rettilineo descritto dalla funzione reale[1] f è la seguente.

La velocità istantanea v_0 nel momento t_0 è la parte standard del rapporto incrementale

$$(f(t_0+dt)-f(t_0))/dt$$ [2]

---

[1] Si vuole che f sia una funzione dai reali nei reali, cioè una funzione che rimane alla scala dei razionali, pur considerando le totalità di approssimazioni (i reali), ma che non vuole arrivare a distinguere i contributi infinitesimi.

[2] L'aver indicato una funzione reale valutata in un punto iperreale non reale ($x+dx$) potrebbe lascare perplessi. Di fatto si sta considerando l'estensione naturale agli iperreali della funzione reale f, cioè l'estensione di f sugli iperreali che associa a un elemento del dominio uno nel codominio nello stesso modo (cioè un modo che ha tutte le stesse proprietà descrivibili con il linguaggio) come quello usato dalla funzione reale. Così f e la sua estensione naturale agli iperreali sono sostanzialmente la stessa funzione, non tanto per chi sono estensionalmente, ma per come operano anche in domini diversi ed eventualmente più ampi. Pertanto è opportuno indicare sia la funzione f sia la sua estensione con lo stesso simbolo. Anche se l'avere le stesse proprietà descrivibili dal linguaggio generalmente non determina univocamente l'estensione, si assume che tra queste ce ne sia una privilegiata che viene presa come estensione naturale.

se questo rapporto è finito e ha sempre la stessa parte standard per ogni infinitesimo non nullo dt. Se in un certo momento t ciò non avviene, in quel momento non ci sarà velocità istantanea.

Di fatto, si è introdotta la nozione di derivata di una funzione reale f in un punto reale x come parte standard del suo rapporto incrementale $(f(x+dx)-f(x))/dx$ in quel punto x quando questa c'è ed è sempre la stessa per qualunque incremento infinitesimo non nullo dx della variabile indipendente.

11. I numeri trascurabili sono utili.

Si è notata così l'utilità di disporre dei numeri iperreali e della funzione parte standard per poter presentare, e poi sviluppare la nozione di velocità istantanea in modo rigoroso, tuttavia molto semplice, direttamente legato alla nozione e facilmente gestibile.

Il problema della pendenza di una curva in un punto, e, più in generale, dei tassi di variazione, è del tutto analogo e porta pure a mostrare l'utilità dei numeri iperreali.

Un po' diversa è la tecnica per giungere ad aree e volumi sommando infiniti infinitesimi, ma pure questa, che esula dagli obiettivi di questo intervento, mostra l'utilità di disporre di infinitesimi.

12. Operare con i numeri trascurabili.

Giustificata e accettata l'introduzione dei numeri iperreali, come operare con questi, come valutare i rapporti incrementali se dipendono da quantità infinitesime di cui non si può conoscere l'esatto valore?

Non è necessario precisare esattamente quale infinitesimo si sta considerando perché si è interessati a risultati che devono valere partendo da un qualsiasi infinitesimo, eventualmente non nullo.

Si possono allora eseguire i calcoli grazie alla conoscenza dell'effetto delle operazioni quando applicate a infinitesimi, finiti non infinitesimi o infiniti, nelle varie combinazioni. Per concludere, si deve tener conto dei risultati che riguardano il comportamento della funzione parte standard.

Eccone un esempio banale.

Se $f(x)$ è x^3-$2x+3$, il suo rapporto incrementale è

$((x+dx)^3-2(x+dx)+3-x^3+2x-3)/dx = (3x^2dx+3x(dx)^2+(dx)^3-2dx)/dx = (3x^2+3x(dx)+(dx)^2-2)(dx/dx) = 3x^2-2+dx(3x+dx)$

e, qualunque sia l'infinitesimo non nullo dx, la parte standard di questo rapporto incrementale è $3x^2-2$ poiché $dx(3x+dx)$ è un infinitesimo. Così la derivata di questa funzione è $3x^2-2$.

Si noti la semplicità e immediatezza dello sviluppo che non ha avuto bisogno delle regole di derivazione, ma solo di un po' di algebra e del comportamento della funzione parte standard.

Tutte le proprietà usate hanno una semplice dimostrazione che segue direttamente dalle loro definizioni, e possono essere utilmente presentate in una scuola superiore ben prima dell'ultimo anno.

Inoltre, partendo dalla nozione di derivata presentata con gli infinitesimi, le stesse regole di derivazione, che sono sempre utili per automatizzare il processo, sono dimostrabili in modo molto più facile e diretto proprio usando le tecniche viste nell'esempio di dimostrazione.

Anche se si accettano i trascurabili e gli iperreali, permane fondamentale la presenza di razionali e reali a causa dei ruoli complementari che hanno questi tre sistemi numerici.

I numeri razionali indicano quantità che, almeno in teoria, sono apprezzabili, concretamente gestibili, e sono i numeri cui si deve arrivare per poter dire di essere giunti alla soluzione di un problema che proviene dalla esperienza quotidiana o dalla tecnica.

I numeri reali indicano processi d'approssimazione mediante razionali e sono un comodo modo per operare con i processi stessi; essi riassumono tali processi che vanno interrotti quando la precisione raggiunta risulta sufficiente rispetto agli obiettivi e alle tecniche disponibili.

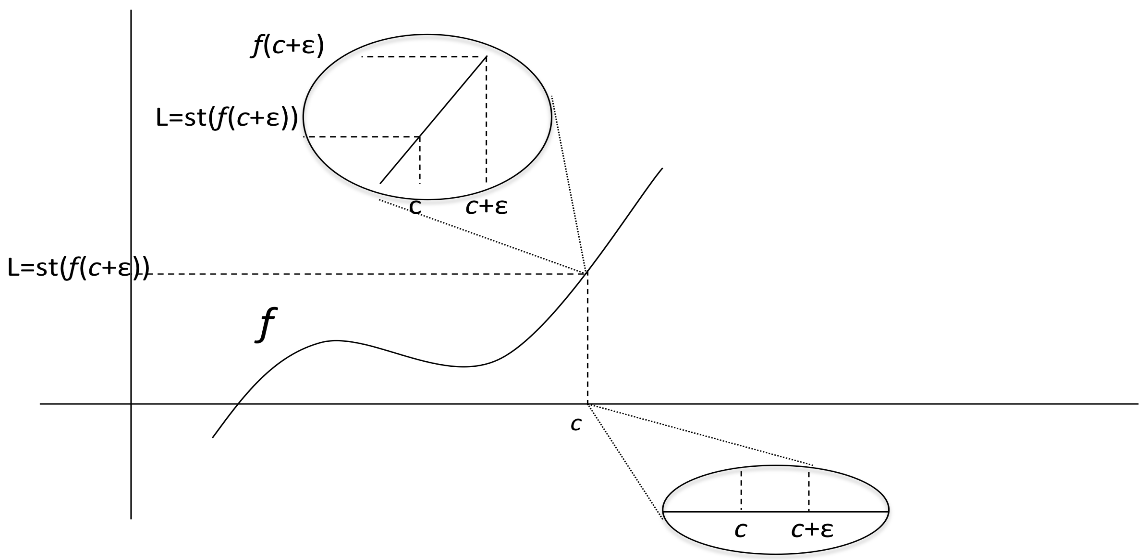
Gli iperreali permettono di affrontare ed elaborare rapporti tra quello che succede puntualmente, quasi all'interno di un punto, e il comportamento globale di un fenomeno. Essi portano a un risultato quando il risultato stesso è finito e non dipende, a meno di trascurabili, dal particolare infinitesimo scelto; sicché vanno considerate le classi di equivalenza di infinitamente vicini, che corrispondono a reali.

Così i reali fanno da ponte tra gli iperreali, che permettono di studiare problemi dell'analisi matematica, e i razionali tra i quali trovare le soluzioni concrete, eventualmente approssimate.

Né gli iperreali né i reali hanno alcuna concretezza o realtà, ma sono elaborazioni concettuali per gestire comodamente molti problemi.
Visto lo stretto legame che intercorre tra razionali, reali e iperreali, è opportuno che sia i reali che gli iperreali vengano introdotti, con rigore concettuale anche se non formale, nell'affrontare il problema dei "buchi" tra i razionali, cioè dell'incommensurabilità tra grandezze, non facendoli cadere dall'empireo, ma come utili strumenti suggeriti dal voler affrontare problemi concreti, come, d'altra parte, è avvenuto storicamente.

13. Il limite con i numeri trascurabili.

Per definire la nozione di derivata di una funzione si è fatto ricorso a un'operazione che, se generalizzata, si presta a precisare anche altre nozioni importanti, la continuità di una funzione ad esempio. Di fatto si è considerata la parte standard di una quantità (nel caso particolare visto il rapporto incrementale), quantità che dipende da un'altra (nello stesso caso visto l'incremento della variabile indipendente), quando questa è infinitamente vicina ma non uguale a un certo valore (lo 0 nel caso esaminato).
In generale, data una funzione reale f e un valore reale c, questa operazione associa loro un numero reale L che è la parte standard dell'immagine, attraverso la funzione f, di ogni iperreale x infinitamente vicino a c, ma diverso da c, se questa c'è ed è sempre la stessa, cioè $L = st(f(x))$ se questa c'è ed è sempre la stessa per ogni x infinitamente vicino a c e diverso da c.
L'operazione definita è chiamata limite della funzione f quando la sua variabile indipendente tende a c. Per questa operazione si userà la notazione $\lim_{x\to c} f(x)$.
Detto altrimenti, poiché ogni iperreale infinitamente vicino a c è del tipo c più un infinitesimo, il limite della funzione f per x tendente a c è la parte standard della funzione calcolata in $c+\varepsilon$, $st(f(x+\varepsilon))$, se questa c'è ed è sempre la stessa per ogni infinitesimo non nullo ε.
Cioè, L è il limite di $f(x)$ per x tendente a c se per ogni x che sia assolutamente vicino a c, ma diverso da c, risulta che $f(x)$ è assolutamente vicino a L (non interessa quello che succede della funzione f in c).
Il numero L così ottenuto indica il comportamento della funzione f nell'infinitamente vicino a c (escluso c).



(In questo disegno l'elisse in basso vuole mostrare, attraverso un ingrandimento infinito, il punto $c+\varepsilon$, mentre l'elisse in alto vuol far vedere che i corrispondenti valori della funzione si vedono con un ingrandimento alla stessa scala dell'altro, indicando che hanno ordinata infinitamente vicina a L. Non interessa cosa succede nel punto di ascissa c e ordinata L, ma ciò non è evidenziato nel disegno).

Ecco uno slogan che coglie l'essenza della nozione di limite:

Se m'impegno moltissimo, faccio benissimo!

con i superlativi assoluti, dovuti all'infinitamente vicino.

14. Difficoltà senza i trascurabili.

Lo stesso slogan ridotto ai superlativi relativi diventa

Più mi impegno, meglio faccio

E' ciò che molti testi scolastici propongono per la nozione di limite, partendo dall'osservazione di una tabella a due colonne, una con valori da attribuire alla variabile indipendente sempre più vicini a un certo valore c, e l'altra con i corrispondenti valori della funzione che si avvicinano a un valore L.

Non volendo usare gli infinitesimi, può sembrare naturale passare ai superlativi relativi dal momento che la nozione di vicinanza tra i reali non può essere che relativa (più vicino di).

Però questo atteggiamento è un grave travisamento della nozione di limite che non può essere colta in questo modo.

Infatti nessuno garantisce che pur facendo sempre meglio non si rimanga comunque lontani dal traguardo, e lo slogan andrebbe completato dicendo

Più mi impegno, meglio faccio, ma il risultato può rimanere sempre insufficiente

e così si vede che questo non corrisponde alla nozione di limite, ma è un grave errore che allontana gli studenti dalla comprensione di questo concetto.

Diventa allora legittimo domandarsi se si possono raggiungere le nozioni di limite e di derivata anche senza usare gli infinitesimi.

La risposta è sì. E' quello che fecero grandi matematici della seconda metà dell'800 (da Cauchy a seguire), salvo complicarsi la vita in modo impressionante.

Lo slogan corretto per la nozione di limite senza far ricorso agli infinitesimi è

So impegnarmi abbastanza da riuscire a far meglio di qualsiasi traguardo prestabilito.

Questo slogan coglie correttamente la nozione di limite: di fatto si può dimostrare abbastanza agevolmente che un certo numero è il limite nella nozione non standard se e solo se lo è nella nozione cosiddetta $\varepsilon\delta$.

Questo slogan mostra anche tutta la complicazione della nozione oggi classica: è un gioco competitivo a due in cui il secondo giocatore ha una strategia vincente se il numero che si ritiene sia il limite lo è davvero.

Cioè, di fronte ad una sfida lanciata dal primo giocatore di avvicinare il risultato più di una qualsiasi quantità reale prefissata, il secondo giocatore deve trovare dei margini d'intervento tali che ogni azione scelta entro quei margini permetta di superare la sfida.

E' un problema del tipo "per ogni - esiste - per ogni" che si risolve facendo corrispondere a un qualsiasi traguardo assegnato (per ogni distanza massima richiesta dal limite) un opportuno livello d'impegno (esiste un intorno di *c* privato di *c*) in modo che ogni azione fatta con almeno quell'impegno (per ogni valore dell'intorno) porta a superare la prova.

In più bisogna partire dal traguardo richiesto per giungere a quanto ci si deve impegnare, invece di partire dall'impegno assoluto per giungere al risultato raggiunto in modo assoluto, come avviene con i metodi non standard.

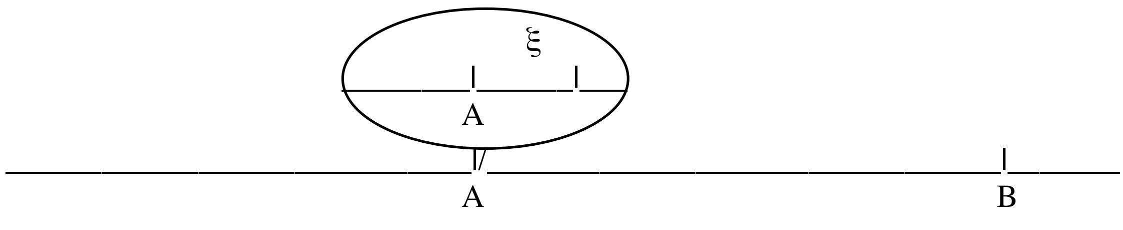
Inoltre la tecnica "classica" permette solo di verificare che un certo numero è il limite, ma non dice niente di come trovarlo. Al contrario la nozione con gli infinitesimi porta direttamente a trovare il limite nel momento in cui si trascura il trascurabile.

Tutte queste difficoltà della nozione "classica" derivano esattamente dal voler rifiutare aprioristicamente gli infinitesimi.

In un certo senso si possono scusare i matematici dell'800 che, quando non era ancora chiara la nozione di numero reale, pensavano di riottenere i risultati ottenuti dall'analisi infinitesimale usando gli infinitesimi (reciproci di infiniti in atto) usando solo l'infinito potenziale.
Ma verso la fine dell'800 ci si accorse che per dire correttamente cosa sono i numeri reali bisognava usare l'infinito attuale nella forma della totalità dei naturali (Cantor).
Quanti danni ha procurato Aristotele con la sua accettazione dell'infinito potenziale e rifiuto di quello attuale: cioè è accettabile un processo che non termina mai, ma non si può neppure concepire un qualcosa che ha infiniti elementi, ad esempio tutti quelli del processo che non termina mai.
Come aveva già mostrato Zenone, la posizione aristotelica sull'infinito tiene solo se si accetta che Achille non raggiungerà mai la tartaruga. Altrimenti o si rifiutano entrambe le nozioni d'infinito, incluso quello potenziale, (accettando che non ci siano processi che non terminano, e assumendo una posizione atomista senza continuità e senza triangoli equilateri) oppure si accettano entrambe, e dunque anche quello attuale e la concepibilità di oggetti infiniti (e dei loro reciproci infinitesimi).
Poiché per sviluppare la matematica odierna bisogna comunque accettare l'infinito attuale, oggi non si giustifica più l'enorme aumento di complicazione presentato dalla trattazione standard introdotta prima ancora che sia indispensabile.
Così facendo si rende molto più difficile per gli studenti la comprensione di quella parte di matematica che è opportuno acquisiscano.
Perché continuare a presentare la matematica come una disciplina inutilmente così complicata da doverla odiare, quando, accettando di parlare d'infinitesimi, diventa molto più naturale e piana?
Tutto ciò non vuol dire che non sia opportuno giungere anche alla nozione $\varepsilon\delta$ di limite e alle sue conseguenze, ma a suo tempo, forse alla fine dell'ultimo anno delle superiori, se non dopo.
Di fatto, grazie agli infinitesimi, si lega la visione globale di processi con una visione puntuale nell'infinitamente vicino a un certo punto, ma può essere utile vedere il comportamento del processo nel "vicino", visibile alla scala dei razionali, di quel punto, e allo scopo è utile legare l'approccio "classico" a quello non standard.

15. Nozioni di infinito.

Si osservi che la nozione d'infinito attuale soggiacente gli infinitesimi è diversa da quella cantoriana.
Infatti, con gli infinitesimi, la nozione d'infinito, che è attuale, può essere evidenziata considerando quanti passi si devono fare se si volesse andare da un punto A a un punto B, visibili sulla retta nella scala usuale, mediante passi di lunghezza infinitesima.



Facendo un numero finito di passi si rimane sempre infinitamente vicino ad A, sicché per arrivare a B bisogna fare infiniti passi.

Bisogna accettare i numeri naturali infiniti (ipernaturali) che contano tali passi!

Come immaginarsi tali numeri naturali?
Sono adatti a contare insiemi così grandi (infiniti) che prima di raggiungere contando tutti gli elementi dell'insieme per forza si perde il conto.
Ma, dopo aver perso il conto, ci sono ancora elementi da considerare e se ne può contare ancora uno in più di quelli cui si era giunti avendo perso il conto (cioè passare al successore immediato del numero sconosciuto cui si era giunti), e poi un altro ancora, e così via proseguendo con i numeri ipernaturali fino ad aver esaurito gli elementi dell'insieme.
In questo processo si può perdere nuovamente il conto, e si può addirittura perdere il conto di quante volte si è perso il conto.

Gli ipernaturali per raggiungere i quali si è perso il conto almeno una volta vengono detti ipernaturali infiniti.

E' evidente che la nozione d'infinito attuale introdotta con i numeri ipernaturali è ben diversa dalla nozione cantoriana: questa considera infinito l'insieme dei naturali che, come vengono intesi generalmente, sono singolarmente finiti, mentre gli ipernaturali presentano singoli numeri che sono infiniti attuali.

16. Integrare entrambi i mondi.

E' opportuno che entrambe le nozioni d'infinito, sia standard che non standard, vengano acquisite dagli studenti per raggiungere una matematica avanzata e poterne disporre quando richiesto.

Ma questa non è la situazione normale degli alunni delle scuole secondarie neppure quelle di secondo grado, nelle quali si può sviluppare con estremo rigore tutta l'analisi matematica prevista nei programmi in modo naturale usando solo metodi non standard, almeno inizialmente, includendo anche facili dimostrazioni che siano esplicative e mostrino il significato di ciò che si fa.

Anche se è vero che ogni affermazione nel linguaggio dei reali si dimostra classicamente se e solo se si dimostra con i metodi non standard, in un linguaggio più ricco i metodi non standard permettono di ottenere di più di quanto si raggiunge con i metodi classici (Henson-Keisler), con modalità più semplici. Nella didattica scolastica non interessa tanto arrivare a più risultati molto avanzati, ma alla semplicità della trattazione che può essere conseguita con metodi non standard.

Questi prevedono di accettare di concepire gli infinitesimi, la funzione parte standard, e un predicato in più che indichi quando un elemento è o non è standard, che non sono disponibili classicamente.

Così l'immediatezza, la facilità e la semplicità ottenute con i metodi non standard non sono riducibili a una trattazione classica né ottenibili in questa.

BIBLIOGRAFIA: (molto parziale, ma di titoli che possono essere interessanti)

Atti delle precedenti giornate nazionali di Analisi non Standard per le scuole superiori

S. Baratella, R. Ferro: *Non Standard Regular Finite Set Theory*, Math. Log. Quart., 41, 1995.

N. Cutland: Non standard analysis and its applications. Cambridge U.P., 1988.

M. Davis: Applied nonstandard analysis, Dover, 2005.

A. Deledicq, M. Diener: Leçons de calcul infinitésimal, Armand Colin, 1989.

F. Diener, G. Reeb: Analyse non standard, Hermann, 1989.

R. Ferro: *Discreto e continuo*, Nuova Secondaria, 2010-11.

G. Goldoni: *Collana* Il professor APOTEMA insegna …

R. Guidotti: Il mondo iperreale e l'analisi non standard, Ilmiolibro, 2015.

Il modello non standard dalla topologia all'analisi funzionale, Ilmiolibro, '16

C.W. Henson, H.J. Keisler: *On the strenght of non standard analysis*: JSL, vol. 51, 1986.

A.E. Hurd, P.A. Loeb: An introduction to nonstandard real analysis, Academic press, 1985.

H.J. Keisler: Foundation of infinitesimal calculus,

Elementary calculus,

Elementi di analisi matematica, Piccin, 1982.

A. Robinson: Non standard analysis,

K.D. Stroyan: Mathematical background: foundation of infinitesimal calculus.

K.D. Stroyan, W.A.J. Luxemburg: Introduction to the theory of infinitesimals, Academic P, 1976

I. Van der Berg, V. Neves: The strenght of non standard analysis, Springer, 2007