

Achille Maffini
Liceo Scientifico
Ulivi Parma

Fondamenti per un
insegnamento dell'Analisi
in termini di ordini di grandezza

Infiniti

- 0 Infinito attuale vs infinito potenziale
- 0 È possibile fondare il concetto di infinito su basi antropologiche e/o esperienziali?
- 0 Alcune risposte
 - 0 Il concetto di 'ricordo' alla base di una teoria degli insiemi finiti.

Vopenka e l'infinito naturale

Mathematics in the Alternative Set Theory

- 0 “Il nostro infinito è un fenomeno quando osserviamo grandi insiemi . Esso si manifesta come assenza di un'indagine facile, quanto la nostra incapacità di cogliere l'insieme nella sua totalità”
- 0 “Un modo possibile per uscire dalla crisi della matematica contemporanea può avvenire attraverso un tentativo di ricostruire la matematica su base fenomenica . [...] Tratteremo il fenomeno di infinito in conformità con la nostra esperienza , cioè come un fenomeno coinvolto nell'osservazione di grandi e incomprensibili insiemi”

Le basi antropologiche di infinito

- 0 Presupposti di fondo:
 - 0 la nozione antropologica di numero intero è caratterizzata dalla funzione 'successore'
 - 0 Con tale funzione è possibile raggiungere (e scrivere) concettualmente qualunque numero naturale
 - 0 una parte di questa produzione teorica, però, rimane, nella pratica, inaccessibile all'uomo;
 - 0 si determina una confusione tra la nozione antropologica di numero e la nozione astratta di numero 'naturale'
- 0 Conseguenza: distinzione tra processo (infinito e quindi basato su presupposti concettuali) e oggetto come frutto di un processo (accessibile o non accessibile sul piano antropologico).

Tre condizioni (intuitive) di fondo

- 0 (i) tutti i numeri interi più grandi di un intero inaccessibile sono inaccessibili;
- 0 (ii) se la somma o il prodotto di due interi è inaccessibile, allora almeno uno dei due è inaccessibile;
- 0 (iii) se la potenza n -esima di un intero è inaccessibile, o l'intero o l'esponente sono inaccessibili.

Categorie numeriche e relazioni

- 0 Numeri potenziali: numeri non ancora utilizzati, ma che possono esserlo un giorno
- 0 Numeri contingenti: numeri potenziali che sono stati nominati da qualcuno
- 0 Numeri necessari: tra i contingenti quelli abitualmente usati e indispensabili per la vita quotidiana
- 0 Numeri inaccessibili: numeri che, in relazione alle limitate possibilità di scrivere numeri e alla dimensione finita dell'uomo non potranno mai essere né utilizzati né concepiti dall'uomo.
- 0 Relazione di analogia: contingenti-potenziali, necessari-inaccessibili
- 0 Trasformazione tra interi potenziali e interi contingenti centrata sui punti fissi che sono gli interi necessari e gli interi inaccessibili

!



Dal modello antropologico al modello matematico

- 0 Interi inaccessibili come 'nulla numerico'
- 0 Modello di riferimento dell'analisi di Leibniz
- 0 Un esempio:

$$! (h) = \frac{(1+h)! - 1}{h} = h + 2$$

- 0 L' "infinitamente piccolo" di Leibniz non come proprietà quanto come connotazione per facilitare l'intuizione
- 0 con linguaggio moderno: 'una formalizzazione che facilita la scoperta e la manipolazione del concetto di limite'

Verso una definizione di 'molto piccolo'

- 0 nel modello antropologico chiameremo *accrescimento impercettibile* un incremento h tale che la parte intera di $1/h$ sia un intero inaccessibile
- 0 Proprietà:
 - 0 (I) la somma e il prodotto di due numeri impercettibili sono impercettibili;
 - 0 (II) il rapporto di un numero impercettibile e di un numero che non lo è, è impercettibile;
 - 0 (III) la somma e il prodotto di due numeri che hanno parti intere inaccessibili hanno le proprietà usuali.

Dagli interi 'inaccessibili' (MA) agli interi 'molto grandi' (MM)

0 Struttura assiomatica esterna:

- 0 1) l'intero 1 non è molto grande;
- 0 2) tutti gli interi maggiori di un numero molto grande sono molto grandi;
- 0 3) se la somma di due interi è molto grande, almeno uno dei due è molto grande;
- 0 4) se il prodotto di due interi è molto grande, almeno uno dei due fattori è molto grande;
- 0 5) se xy è molto grande, allora o x o y è molto grande;
- 0 6) esiste un intero molto grande.

Conseguenze della non costruttività dell'assioma

6

- 0 il predicato 'essere molto grande' non individua un insieme di numeri
- 0 soggettività antropologica: approccio storico-sociale?

Dagli interi non standard agli iperreali

- 0 A) Un numero reale è detto *molto grande* se e solo se il valore assoluto della sua parte intera è molto grande;
- 0 B) un numero reale è detto *moderato* se e solo se il suo valore assoluto non è molto grande;
- 0 C) un numero reale è detto *molto piccolo* se e solo se è nullo oppure se il valore assoluto del suo reciproco è molto grande;
- 0 D) due numeri reali sono detti *molto vicini* se e solo se la loro differenza è molto piccola.
- 0 La funzione parte standard: il concetto di 'ombra' di un numero iperreale:

Regole di Leibniz

- 0 *moderato+moderato=moderato*
- 0 *molto piccolo+molto piccolo=molto piccolo*
- 0 *moderato·moderato=moderato*
- 0 *molto piccolo·moderato=molto piccolo*

Estensione di ZF

- 0 Il paradosso del sorite e gli ordini di grandezza: da ZF a ZF+. Il nuovo impianto assiomatico:
 - 0 (i) Tutti gli interi moderati sono elementi di N
 - 0 (ii) 1 è un intero moderato
 - 0 (iii) Tutti gli interi che sono minori di un intero moderato sono moderati
 - 0 (iv) Se n e p sono interi moderati, allora $n+p$ e $n \square p$ sono interi moderati
 - 0 (v) Esiste un elemento di N che non è un intero moderato.
- 0 Da ZF+ a ZF++: principio di induzione moderato
 - 0 Per ogni proprietà $P(n)$ di ZF+, se per tutti gli n moderati maggiori di n_0 , $P(n)$ implica $P(n+1)$ e se $P(n_0)$ è vera, allora $P(n)$ è vera per tutti gli n moderati maggiori di n_0 .

Conclusioni

- 0 Novità non dal punto di vista tecnico quanto da quello epistemologico
- 0 Superamento della dicotomia occidentale potenziale/attuale con l'idea di infinito naturale;
- 0 Dal concetto astratto di infinito a quello intuitivo di 'inarrivabile': dalla non fine alla non percezione della fine
- 0 Linguaggio più vicino all'intuizione degli studenti

GRAZIE

a.maffini@achillemaffini.it