Equazioni differenziali

Roberto Zanasi

1 ottobre 2016

Definizione

Che cosa è una equazione differenziale?

Alcune definizioni

Una equazione che contiene le derivate di una o più variabili dipendenti, fatte rispetto a una o più variabili indipendenti.

Zill — A First Course in Differential Equations

Alcune definizioni

Una equazione differenziale è una relazione tra una funzione del tempo e le sue derivate.

Braun — Differential equations and their applications

Alcune definizioni

Le equazioni in cui la funzione incognita compare sotto il segno di derivata sono dette equazioni differenziali.

L. Elsgolts — Differential Equations and the Calculus of Variations

Alcune definizioni

Sia $f(x)$ una funzione nella variabile x su un intervallo $I = (a, b)$. Con equazione differenziale ordinaria si intende una equazione che contiene x, la funzione $f(x)$ e una o più sue derivate.

Tenenbaum, Pollard — Ordinary Differential Equations

Alcune definizioni

Una equazione differenziale è una equazione che mette in relazione in modo non banale una funzione incognita e una o più delle derivate o differenziali di una funzione incognita calcolate rispetto a una o più variabili indipendenti.

Ross — Differential Equations

Alcune definizioni

Una equazione differenziale è una equazione che mette in relazione una funzione f con una o più delle sue derivate.

Krantz - Differential equations demystified

Alcune definizioni

Si chiama equazione differenziale un'equazione che ha per incognita una funzione $y = f(x)$ *e che stabilisce una relazione fra la variabile indipendente* x*, la funzione* $f(x)$ *e almeno una delle sue derivate (*$f'(x)$*,* $f''(x)$*,* $\ldots$*).*

Bergamini, Trifone, Barozzi — Corso base verde di matematica, edizione 2.

Alcune definizioni

Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'incognita è una funzione, e in cui compaiono una o più derivate della funzione incognita.

Leonardo Sasso — LA matematica a colori, edizione verde.

Una definizione più precisa

Sia U un dominio aperto di uno spazio euclideo di dimensione n, e sia $\mathbf{v}$ un campo vettoriale in U. È detta equazione differenziale definita dal campo vettoriale $\mathbf{v}$ l'equazione $x' = \mathbf{v}(x)$, con $x \in U$.

Una definizione più precisa

Sia U un dominio aperto di uno spazio euclideo di dimensione n, e sia $\mathbf{v}$ un campo vettoriale in U. È detta equazione differenziale definita dal campo vettoriale $\mathbf{v}$ l'equazione $x' = \mathbf{v}(x)$, con $x \in U$.

A volte vengono chiamate differenziali delle equazioni in cui compaiono funzioni incognite e loro derivate. Ciò è falso. Per esempio, $\frac{dx}{dt} = x(x(t))$ non è un'equazione differenziale.

Arnold — Equazioni differenziali ordinarie

Una definizione utile

- $y(x)$ rappresenta un processo che si evolve nel tempo

Una definizione utile

- $y(x)$ rappresenta un processo che si evolve nel tempo
- Un condensatore carico si scarica attraverso una resistenza

Una definizione utile

- $y(x)$ rappresenta un processo che si evolve nel tempo
- Un condensatore carico si scarica attraverso una resistenza
  - x è il tempo

Una definizione utile

- $y(x)$ rappresenta un processo che si evolve nel tempo
- Un condensatore carico si scarica attraverso una resistenza
  - x è il tempo
  - y è la tensione misurata ai capi del condensatore

Una definizione utile

- $y(x)$ rappresenta un processo che si evolve nel tempo
- Un condensatore carico si scarica attraverso una resistenza
  - x è il tempo
  - y è la tensione misurata ai capi del condensatore
- Una sostanza radioattiva decade

Una definizione utile

- $y(x)$ rappresenta un processo che si evolve nel tempo
- Un condensatore carico si scarica attraverso una resistenza
  - x è il tempo
  - y è la tensione misurata ai capi del condensatore
- Una sostanza radioattiva decade
  - x è il tempo

Una definizione utile

- $y(x)$ rappresenta un processo che si evolve nel tempo
- Un condensatore carico si scarica attraverso una resistenza
  - x è il tempo
  - y è la tensione misurata ai capi del condensatore
- Una sostanza radioattiva decade
  - x è il tempo
  - y è il numero di atomi presenti nella sostanza

Una definizione utile

- So quello che succede istante per istante, voglio ricostruire il passato e prevedere il futuro

Una definizione utile

- So quello che succede istante per istante, voglio ricostruire il passato e prevedere il futuro
- Condensatore: la tensione misurata diminuisce nel tempo, in maniera più rapida se la tensione è più alta

Una definizione utile

- So quello che succede istante per istante, voglio ricostruire il passato e prevedere il futuro
- Condensatore: la tensione misurata diminuisce nel tempo, in maniera più rapida se la tensione è più alta
- $V'(t) = -\dfrac{1}{RC} V(t)$

Una definizione utile

- So quello che succede istante per istante, voglio ricostruire il passato e prevedere il futuro
- Condensatore: la tensione misurata diminuisce nel tempo, in maniera più rapida se la tensione è più alta
- $V'(t) = -\frac{1}{RC} V(t)$
- Decadimento radioattivo: il numero di disintegrazioni dipende dalla quantità di atomi presenti, quindi la variazione del numero di atomi dipende dal numero di atomi stesso.

Una definizione utile

- So quello che succede istante per istante, voglio ricostruire il passato e prevedere il futuro
- Condensatore: la tensione misurata diminuisce nel tempo, in maniera più rapida se la tensione è più alta
- $V'(t) = -\dfrac{1}{RC}V(t)$
- Decadimento radioattivo: il numero di disintegrazioni dipende dalla quantità di atomi presenti, quindi la variazione del numero di atomi dipende dal numero di atomi stesso.
- $x'(t) = -kx(t)$

Definizione

Una equazione differenziale del primo ordine è una *legge evolutiva locale*, cioè una equazione del tipo

$$y' = f(y).$$

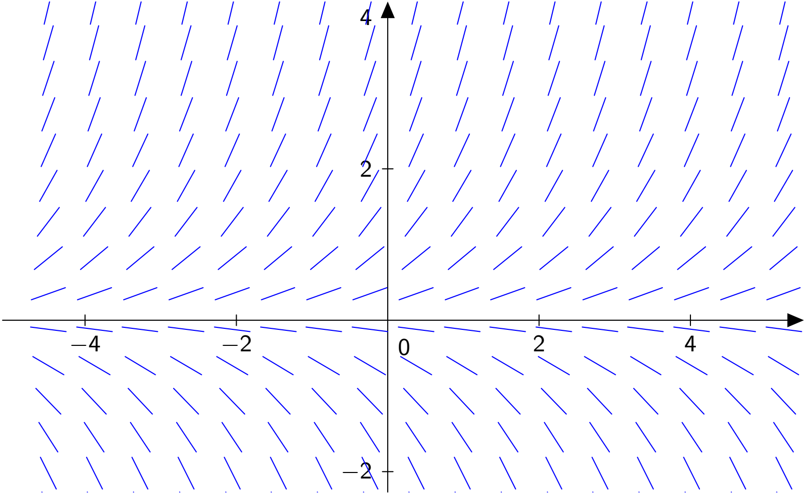
Definizione

Una equazione differenziale del primo ordine è una *legge evolutiva locale*, cioè una equazione del tipo

$$y' = f(y).$$

Il tasso di variazione della funzione y dipende da y stesso.

Campo di direzioni



Modi diversi per indicare una equazione differenziale

- $y' = f(y)$

Modi diversi per indicare una equazione differenziale

- $y' = f(y)$
- $y'(x) = f(y(x))$

Modi diversi per indicare una equazione differenziale

- $y' = f(y)$
- $y'(x) = f(y(x))$
- $\operatorname{st}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = f(y)$

Modi diversi per indicare una equazione differenziale

- $y' = f(y)$
- $y'(x) = f(y(x))$
- $\mathrm{st}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = f(y)$
- $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ (per convenzione)

Condizione iniziale

Per ricostruire il passato e prevedere il futuro serve un punto di partenza:

$$y(x_0) = y_0.$$

Condizione iniziale

Per ricostruire il passato e prevedere il futuro serve un punto di partenza:

$$y(x_0) = y_0.$$

Vogliamo cercare di calcolare come si evolverà la funzione $y(x)$ a partire dal punto (x_0, y_0).

Significato geometrico

- Dato il punto (x_0, y_0), seguiamo la retta tangente a y

Significato geometrico

- Dato il punto (x_0, y_0), seguiamo la retta tangente a y
- Facciamo un passo verso destra di ampiezza Δx

Significato geometrico

- Dato il punto (x_0, y_0), seguiamo la retta tangente a y
- Facciamo un passo verso destra di ampiezza Δx
- Facciamo un passo verso l'alto di ampiezza $y'(x_0)\Delta x$

Significato geometrico

- Dato il punto (x_0, y_0), seguiamo la retta tangente a y
- Facciamo un passo verso destra di ampiezza Δx
- Facciamo un passo verso l'alto di ampiezza $y'(x_0)\Delta x$
- Troviamo $(x_1, y_1) = (x_0 + \Delta x, y_0 + y'(x_0)\Delta x)$

Significato geometrico

- Dato il punto (x_0, y_0), seguiamo la retta tangente a y
- Facciamo un passo verso destra di ampiezza Δx
- Facciamo un passo verso l'alto di ampiezza $y'(x_0)\Delta x$
- Troviamo $(x_1, y_1) = (x_0 + \Delta x, y_0 + y'(x_0)\Delta x)$
- Ricominciamo

Un esempio

- Equazione differenziale: $y' = y$

Un esempio

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 0$

Un esempio

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 0$
- Primo passo: $x_0 = 0 \longmapsto x_1 = 0 + \Delta x = \Delta x$

Un esempio

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 0$
- Primo passo: $x_0 = 0 \longmapsto x_1 = 0 + \Delta x = \Delta x$
- $y'(0) = 0$

Un esempio

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 0$
- Primo passo: $x_0 = 0 \longmapsto x_1 = 0 + \Delta x = \Delta x$
- $y'(0) = 0$
- $y_0 = 0 \longmapsto y_1 = 0 + 0 = 0$

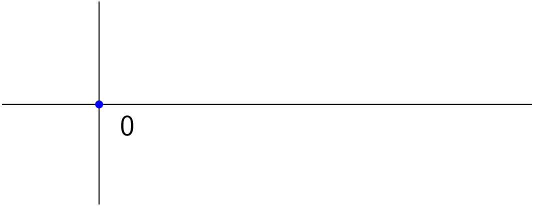
Un esempio

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 0$
- Primo passo: $x_0 = 0 \longmapsto x_1 = 0 + \Delta x = \Delta x$
- $y'(0) = 0$
- $y_0 = 0 \longmapsto y_1 = 0 + 0 = 0$
- Quindi da $(0, 0)$ si passa a $(\Delta x, 0)$

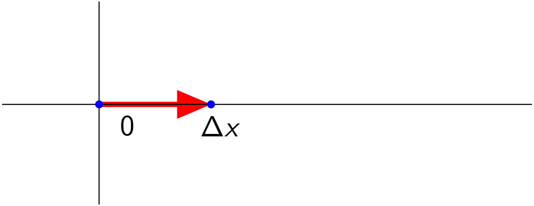
Un esempio

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 0$
- Primo passo: $x_0 = 0 \longmapsto x_1 = 0 + \Delta x = \Delta x$
- $y'(0) = 0$
- $y_0 = 0 \longmapsto y_1 = 0 + 0 = 0$
- Quindi da $(0, 0)$ si passa a $(\Delta x, 0)$
- Si ricomincia

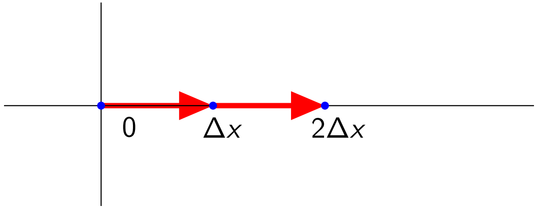
Un esempio



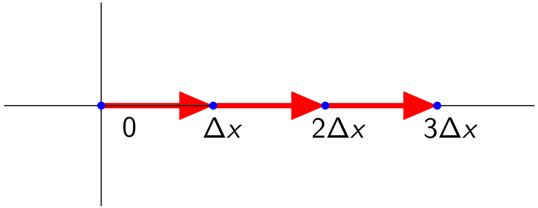
Un esempio



Un esempio



Un esempio



Un esempio

La soluzione dell'equazione $y' = y$ passante per il punto $(0, 0)$ è $y = 0$.

Un esempio

La soluzione dell'equazione $y' = y$ passante per il punto $(0, 0)$ è $y = 0$.

Possiamo facilmente verificare il risultato trovato, sostituendo.

Un esempio più interessante

- Equazione differenziale: $y' = y$

Un esempio più interessante

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 1$

Un esempio più interessante

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 1$
- $x_0 = 0 \longmapsto x_1 = 0 + \Delta x$

Un esempio più interessante

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 1$
- $x_0 = 0 \longmapsto x_1 = 0 + \Delta x$
- $y'(0) = 1$

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 1$
- $x_0 = 0 \longmapsto x_1 = 0 + \Delta x$
- $y'(0) = 1$
- $y(0) = 1 \longmapsto y_1 = 1 + 1 \cdot \Delta x$

Un esempio più interessante

- Equazione differenziale: $y' = y$
- Condizione iniziale: $y(0) = 1$
- $x_0 = 0 \longmapsto x_1 = 0 + \Delta x$
- $y'(0) = 1$
- $y(0) = 1 \longmapsto y_1 = 1 + 1 \cdot \Delta x$
- Quindi da $(0, 1)$ si passa a $(\Delta x, 1 + \Delta x)$

Un esempio più interessante

- Nuovo punto: $(\Delta x, 1 + \Delta x)$

Un esempio più interessante

- Nuovo punto: $(\Delta x, 1 + \Delta x)$
- Nuova pendenza: $y'(\Delta x) = 1 + \Delta x$

Un esempio più interessante

- Nuovo punto: $(\Delta x, 1 + \Delta x)$
- Nuova pendenza: $y'(\Delta x) = 1 + \Delta x$
- Passo verso destra: $x_2 = x_1 + \Delta x = 2\Delta x$

Un esempio più interessante

- Nuovo punto: $(\Delta x, 1 + \Delta x)$
- Nuova pendenza: $y'(\Delta x) = 1 + \Delta x$
- Passo verso destra: $x_2 = x_1 + \Delta x = 2\Delta x$
- Passo verso l'alto:

$$y_2 = y_1 + y'(x_1)\Delta x$$

Un esempio più interessante

- Nuovo punto: $(\Delta x, 1 + \Delta x)$
- Nuova pendenza: $y'(\Delta x) = 1 + \Delta x$
- Passo verso destra: $x_2 = x_1 + \Delta x = 2\Delta x$
- Passo verso l'alto:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + y'(x_1)\Delta x \\ &= 1 + \Delta x + (1 + \Delta x)\Delta x \end{aligned}$$

Un esempio più interessante

- Nuovo punto: $(\Delta x, 1 + \Delta x)$
- Nuova pendenza: $y'(\Delta x) = 1 + \Delta x$
- Passo verso destra: $x_2 = x_1 + \Delta x = 2\Delta x$
- Passo verso l'alto:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + y'(x_1)\Delta x \\ &= 1 + \Delta x + (1 + \Delta x)\Delta x \\ &= (1 + \Delta x)^2 \end{aligned}$$

Un esempio più interessante

Un altro passo:

$$y_3 = y_2 + y'(x_2)\Delta x$$

Un esempio più interessante

Un altro passo:

$$
\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + y'(x_2)\Delta x \\
&= (1+\Delta x)^2 + (1+\Delta x)^2 \Delta x
\end{aligned}
$$

Un esempio più interessante

Un altro passo:

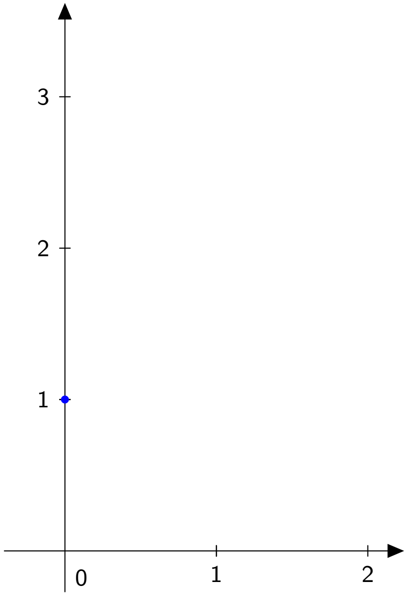
$$
\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + y'(x_2)\Delta x \\
&= (1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x)^2 \Delta x \\
&= (1 + \Delta x)^3.
\end{aligned}
$$

Un esempio più interessante

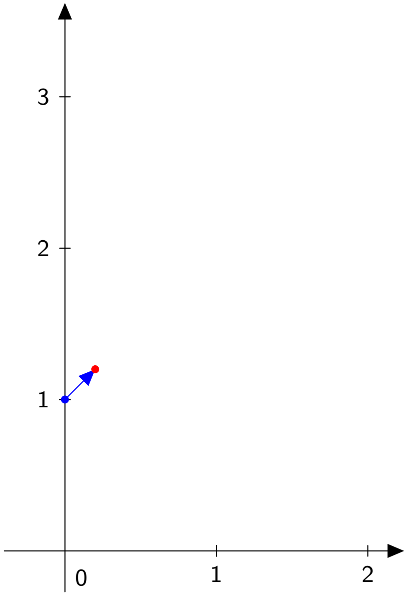
In generale:

$$y_n = y_{n-1} + y'(x_{n-1})\Delta x = (1 + \Delta x)^n.$$

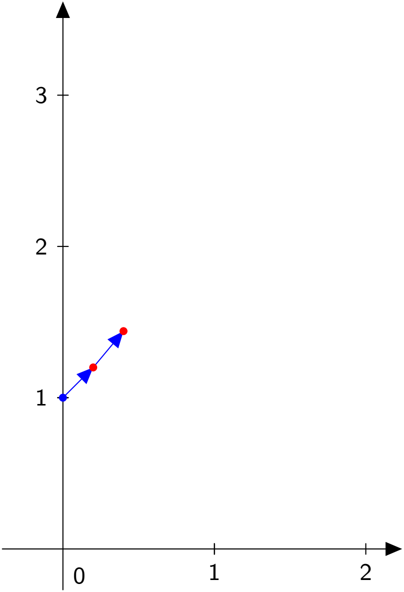
Un esempio più interessante



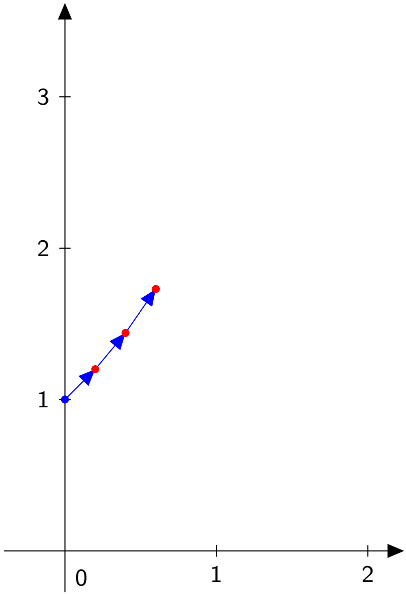
Un esempio più interessante



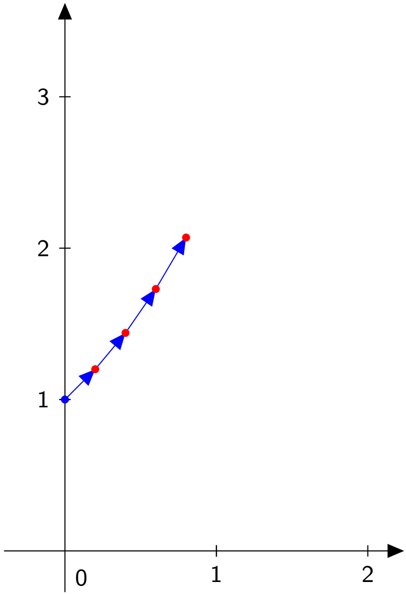
Un esempio più interessante



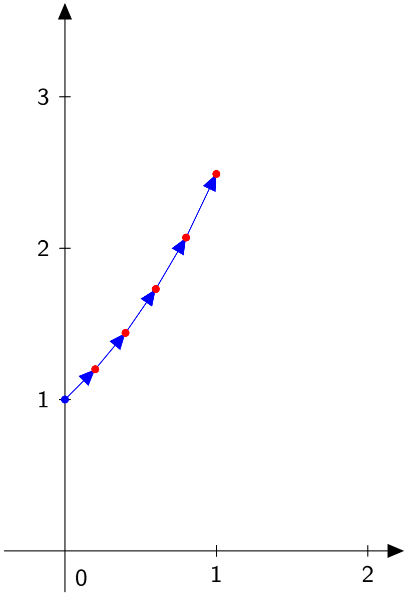
Un esempio più interessante



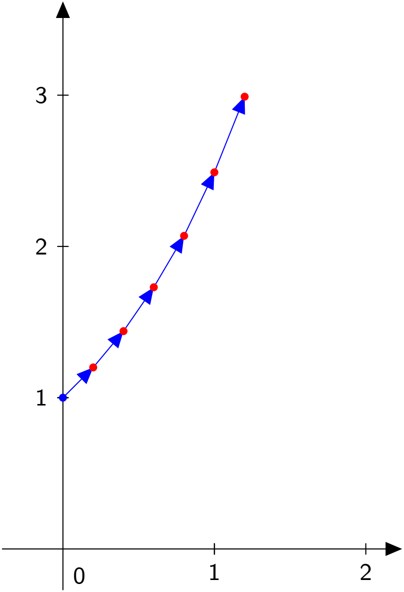
Un esempio più interessante



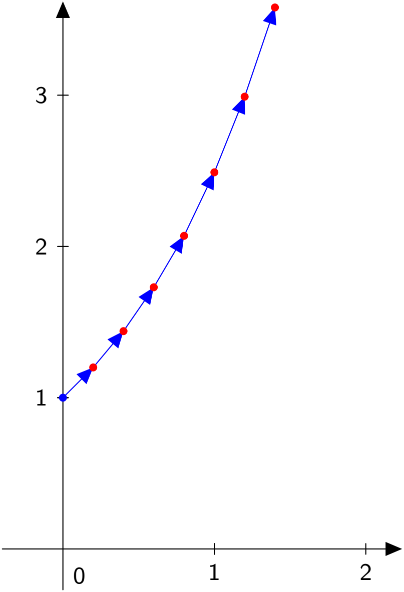
Un esempio più interessante



Un esempio più interessante



Un esempio più interessante



Passi infinitesimi

Invece di avanzare con passi finiti di ampiezza Δx, ora facciamo passi infinitesimi di ampiezza dx.

Passi infinitesimi

- Si fissa un intervallo generico $[0, x]$

Passi infinitesimi

- Si fissa un intervallo generico $[0, x]$
- Lo si suddivide in un numero ipernaturale infinito N di parti

Passi infinitesimi

- Si fissa un intervallo generico $[0, x]$
- Lo si suddivide in un numero ipernaturale infinito N di parti
- Ogni parte ha ampiezza $dx = \dfrac{x}{N}$

Passi infinitesimi

- Si fissa un intervallo generico $[0, x]$
- Lo si suddivide in un numero ipernaturale infinito N di parti
- Ogni parte ha ampiezza $dx = \dfrac{x}{N}$
- La formula precedente diventa:

Passi infinitesimi

- Si fissa un intervallo generico $[0, x]$
- Lo si suddivide in un numero ipernaturale infinito N di parti
- Ogni parte ha ampiezza $dx = \dfrac{x}{N}$
- La formula precedente diventa:

$$y_N = y_{N-1} + y'(x_{N-1})dx$$

Passi infinitesimi

- Si fissa un intervallo generico $[0, x]$
- Lo si suddivide in un numero ipernaturale infinito N di parti
- Ogni parte ha ampiezza $dx = \dfrac{x}{N}$
- La formula precedente diventa:

$$\begin{aligned} y_N &= y_{N-1} + y'(x_{N-1})dx \\ &= (1 + dx)^N \end{aligned}$$

Passi infinitesimi

- Si fissa un intervallo generico $[0, x]$
- Lo si suddivide in un numero ipernaturale infinito N di parti
- Ogni parte ha ampiezza $dx = \dfrac{x}{N}$
- La formula precedente diventa:

$$\begin{aligned} y_N &= y_{N-1} + y'(x_{N-1})dx \\ &= (1 + dx)^N \\ &= \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \end{aligned}$$

Passi infinitesimi

- Si fissa un intervallo generico $[0, x]$
- Lo si suddivide in un numero ipernaturale infinito N di parti
- Ogni parte ha ampiezza $dx = \dfrac{x}{N}$
- La formula precedente diventa:

$$\begin{aligned} y_N &= y_{N-1} + y'(x_{N-1})dx \\ &= (1+dx)^N \\ &= \left(1+\frac{x}{N}\right)^N \\ &= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{N}{x}}\right)^{\frac{N}{x}}\right]^x \end{aligned}$$

Passi infinitesimi

- Si fissa un intervallo generico $[0, x]$
- Lo si suddivide in un numero ipernaturale infinito N di parti
- Ogni parte ha ampiezza $dx = \dfrac{x}{N}$
- La formula precedente diventa:

$$
\begin{aligned}
y_N &= y_{N-1} + y'(x_{N-1})dx \\
&= (1 + dx)^N \\
&= \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \\
&= \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{N}{x}}\right)^{\frac{N}{x}}\right]^x \\
&\approx e^x .
\end{aligned}
$$

Riassumendo

La funzione che passa per il punto $(0, 1)$ e il cui tasso di variazione istantaneo è uguale al valore della funzione stessa è $y(x) = e^x$.

La funzione che passa per il punto $(0, 1)$ e il cui tasso di variazione istantaneo è uguale al valore della funzione stessa è $y(x) = e^x$.

Si può verificare facilmente la soluzione sostituendo $y(x) = e^x$ nell'equazione $y'(x) = y(x)$.

Un altro esempio

Risolvere l'equazione $y' = ky$, dove k è una costante fissata, trovando la soluzione passante per il punto $(0, y_0)$.

$$y_1 = y_0 + y'(x_0)\Delta x$$

$y' = ky$, $y(0) = y_0$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + y'(x_0)\Delta x \\ &= y_0 + f(y_0)\Delta x \end{aligned}$$

$y' = ky,\ y(0) = y_0$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + y'(x_0)\Delta x \\ &= y_0 + f(y_0)\Delta x \\ &= y_0 + ky_0\Delta x \end{aligned}$$

$y' = ky,\ y(0) = y_0$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + y'(x_0)\Delta x \\
&= y_0 + f(y_0)\Delta x \\
&= y_0 + ky_0\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x),
\end{aligned}
$$

$y' = ky,\ y(0) = y_0$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + y'(x_0)\Delta x \\ &= y_0 + f(y_0)\Delta x \\ &= y_0 + ky_0\Delta x \\ &= y_0(1 + k\Delta x), \\ y_2 &= y_1 + y'(x_1)\Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + y'(x_0)\Delta x \\
&= y_0 + f(y_0)\Delta x \\
&= y_0 + k y_0 \Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x), \\
y_2 &= y_1 + y'(x_1)\Delta x \\
&= y_1 + f(y_1)\Delta x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + y'(x_0)\Delta x \\
&= y_0 + f(y_0)\Delta x \\
&= y_0 + k y_0 \Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x), \\
y_2 &= y_1 + y'(x_1)\Delta x \\
&= y_1 + f(y_1)\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x) + k y_0(1 + k\Delta x)\Delta x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + y'(x_0)\Delta x \\
&= y_0 + f(y_0)\Delta x \\
&= y_0 + k y_0 \Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x), \\
y_2 &= y_1 + y'(x_1)\Delta x \\
&= y_1 + f(y_1)\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x) + k y_0(1 + k\Delta x)\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x)^2,
\end{aligned}
$$

$y' = ky,\ y(0) = y_0$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + y'(x_0)\Delta x \\
&= y_0 + f(y_0)\Delta x \\
&= y_0 + k y_0 \Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x), \\
y_2 &= y_1 + y'(x_1)\Delta x \\
&= y_1 + f(y_1)\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x) + k y_0(1 + k\Delta x)\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x)^2, \\
\dots
\end{aligned}$$

$y' = ky$, $y(0) = y_0$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + y'(x_0)\Delta x \\
&= y_0 + f(y_0)\Delta x \\
&= y_0 + ky_0\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x), \\
y_2 &= y_1 + y'(x_1)\Delta x \\
&= y_1 + f(y_1)\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x) + ky_0(1 + k\Delta x)\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x)^2, \\
\dots & \\
y_n &= y_{n-1} + y'(x_{n-1})\Delta x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + y'(x_0)\Delta x \\
&= y_0 + f(y_0)\Delta x \\
&= y_0 + k y_0 \Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x), \\
y_2 &= y_1 + y'(x_1)\Delta x \\
&= y_1 + f(y_1)\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x) + k y_0(1 + k\Delta x)\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x)^2, \\
\ldots & \\
y_n &= y_{n-1} + y'(x_{n-1})\Delta x \\
&= y_0(1 + k\Delta x)^n.
\end{aligned}
$$

Passando ora a indici infiniti, e ponendo $dx = x/N$, abbiamo:

Passando ora a indici infiniti, e ponendo $dx = x/N$, abbiamo:

$$y_N = y_0(1 + kdx)^N$$

Passando ora a indici infiniti, e ponendo $dx = x/N$, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
y_N &= y_0(1 + kdx)^N \\
&= y_0\left(1 + k\frac{x}{N}\right)^N
\end{aligned}
$$

Passando ora a indici infiniti, e ponendo $dx = x/N$, abbiamo:

$$\begin{aligned} y_N &= y_0(1+kdx)^N \\ &= y_0\left(1+k\frac{x}{N}\right)^N \\ &= y_0\left[\left(1+\frac{1}{\frac{N}{kx}}\right)^{\frac{N}{kx}}\right]^{kx} \end{aligned}$$

Passando ora a indici infiniti, e ponendo $dx = x/N$, abbiamo:

$$\begin{aligned} y_N &= y_0(1 + kdx)^N \\ &= y_0 \left(1 + k\frac{x}{N}\right)^N \\ &= y_0 \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{N}{kx}}\right)^{\frac{N}{kx}}\right]^{kx} \\ &\approx y_0 e^{kx}. \end{aligned}$$

Passando ora a indici infiniti, e ponendo $dx = x/N$, abbiamo:

$$\begin{aligned} y_N &= y_0(1 + kdx)^N \\ &= y_0 \left(1 + k\frac{x}{N}\right)^N \\ &= y_0 \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{N}{kx}}\right)^{\frac{N}{kx}}\right]^{kx} \\ &\approx y_0 e^{kx}. \end{aligned}$$

In questo caso, quindi, la soluzione è $y = y_0 e^{kx}$.

Più in generale

$y' = f(y)$ equazione autonoma

Più in generale

$$y' = f(y) \qquad \text{equazione autonoma}$$
$$y' = f(x, y) \qquad \text{equazione non autonoma}$$

Il materiale

Materiale disponibile su internet:

http://tinyurl.com/direzioni

Il materiale

Materiale disponibile su internet:

http://tinyurl.com/direzioni

P.S. Le soluzioni di $y'(x) = y(y(x))$ sono:

$$y_1(x) = e^{\frac{\pi}{3}(-1)^{1/6}} x^{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}},$$
$$y_2(x) = e^{\frac{\pi}{3}(-1)^{11/6}} x^{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$