Quale matematica per il terzo anno di un liceo a vocazione non scientifica?

di Andrea Centomo

Liceo “F. Corradini” di Thiene (VI)

email: `andrea.centomo@istruzione.it`

Lucca, 1 ottobre 2016

Problemi: Indicazioni Nazionali [1] con molte pretese, poco tempo... studenti...

1 Programmi svolti

Programma **senza** NSA	Mese	Programma **con** NSA (3AL)
	ottobre	
Fattorizzazione polinomi		Sezioni coniche
Teorema di Ruffini		Parabola (luogo)
Frazioni algebriche		Equazione canonica
Equazioni di II grado		Traslazioni
	novembre	
Equazioni con frazioni algebriche		Funzioni quadratiche
Fattorizzazione polinomi grado 2		Equazioni, disequazioni grado 2
	dicembre	
Parabole ad asse verticale		Tangente al grafico – NSA
		Studio di funzioni quadratiche
		Problemi di II grado

Tabella 1. Primo periodo

Nota 1. Studio delle funzioni quadratiche senza monotonia

Programma **senza** NSA	Mese	Programma **con** NSA
	gennaio	
Disequazioni di II grado		Funzioni polinomiali di III grado
Disequazioni di grado maggiore		Segno e zeri
Disequazioni fratte		Fattorizzazione polinomi III grado
Sistemi di disequazioni		Divisione euclidea
	febbraio	
Luoghi (circonferenza, parabola)		Teorema di Ruffini
Circonferenza		Equazioni, disequazioni grado 3
Teoremi sulla circonferenza		Massimi e minimi – NSA Fermat
Poligoni inscritti		Studio completo di cubiche
	marzo	
Equazione della circonferenza		Elementi di calcolo combinatorio
Circonferenza per tre punti		Funzioni omografiche (iperbole)
	aprile	
Richiami sulle rette		Equazioni e disequazioni fratte
Problemi di geometria analitica		Asintoti e studio omografiche – NSA

Tabella 2. Secondo periodo

Programma **senza** NSA	Mese	Programma **con** NSA
	maggio	
Parabola		Circonferenza (luogo)
Problemi di geometria analitica		Ellisse (luogo)
		Problemi di geometria analitica
	giugno	
Ellisse e iperbole		Iperbole (luogo)

Tabella 3. Fine secondo periodo

→ Entrambi i programmi svolti sono in linea con le Indicazioni Nazionali

Ma solo il programma con NSA soddisfa in modo adeguato l'indicazione

II biennio

... studierà le funzioni elementari dell'analisi e dei loro grafici, in particolare le funzioni polinomiali, razionali... (Relazioni e funzioni)

Indicazione fondamentale... taciuta nei libri di testo e trascurata nella didattica!

2 Infinitesimi e funzioni quadratiche

Un numero iperreale infinitesimo $\epsilon \neq 0$ è caratterizzato da

$$-\frac{1}{n} < \epsilon < \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ed è un numero intuitivamente "**molto piccolo**" in valore assoluto (lente o zoom).

Gli infinitesimi sono molto utili!

Prendiamo, ad esempio, la funzione quadratica

$$y(x) = x^2$$

e il punto $P = (2, 4)$ che appartiene al suo grafico.

Il punto

$$Q = (2 + \epsilon, (2 + \epsilon)^2) = (2 + \epsilon, 4 + 4\epsilon + \epsilon^2)$$

appartiene al grafico di $y(x)$ e, siccome ϵ è un infinitesimo, è "**vicino**" a P.

La pendenza della retta passante per P e Q è

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 + 4\epsilon + \epsilon^2 - 4}{2 + \epsilon - 2} = 4 + \epsilon$$

e differisce dal valore 4 per un infinitesimo.

La pendenza della retta tangente al grafico di $y(x)$ sarà, per definizione,

$$m = \mathrm{st}(4 + \epsilon) = 4,$$

quindi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in P è

$$y - 4 = 4(x - 2) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 4x - 4.$$

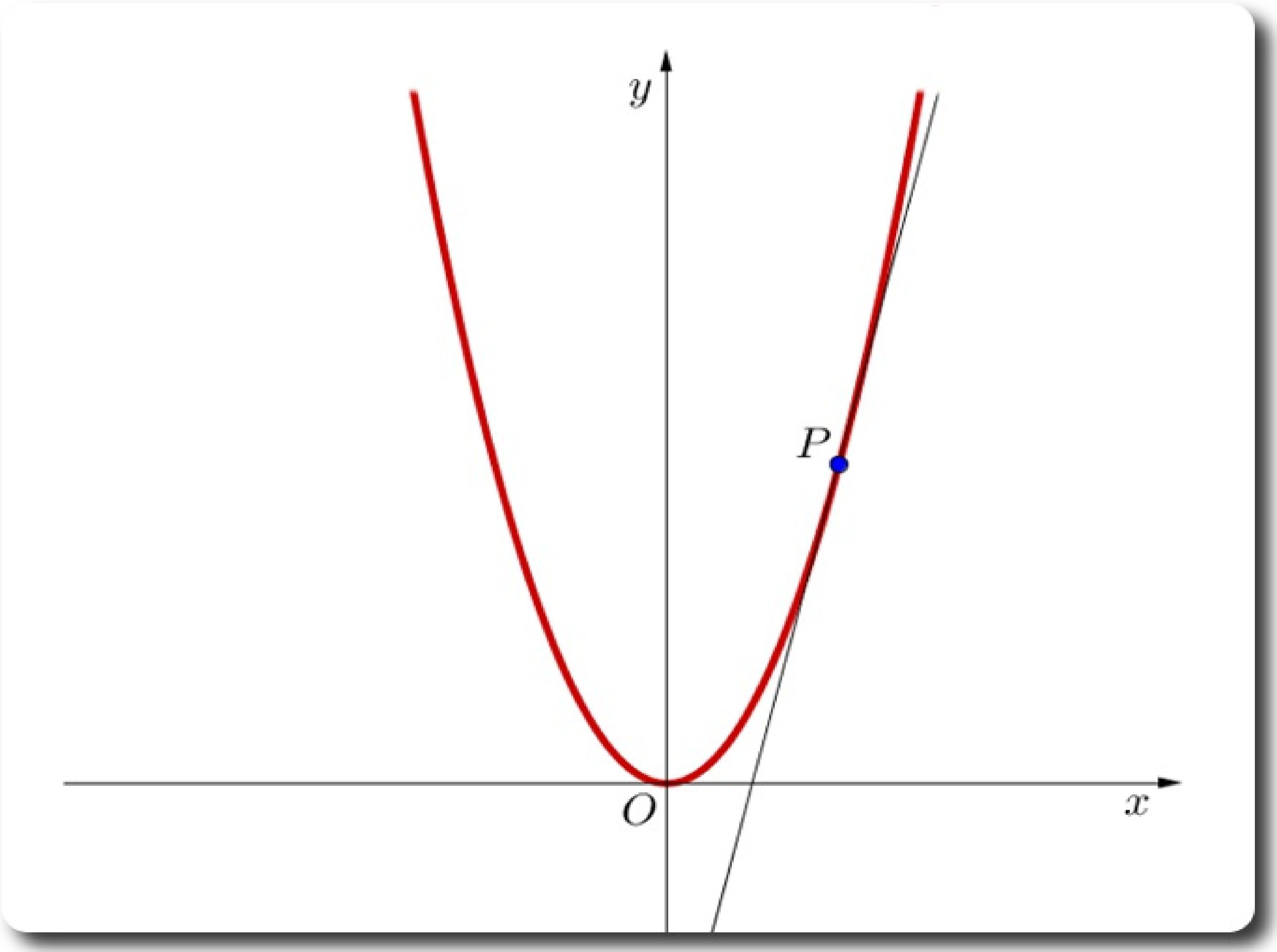

Figura 1. Tangente e grafico localmente si confondono (vedi I. Bivens)

Si può generalizzare al caso

$$y(x) = a x^2 + b x + c, \qquad a \neq 0$$

e ricavare la formula della pendenza m della retta tangente al grafico in un punto di ascissa x_P

$$m = 2 a x_P + b$$

facendo notare anche che $m = 0$ quando

$$x_P = -\frac{b}{2a}$$

ossia in corrispondenza del vertice della parabola che è grafico della funzione.

Importante 2. Insistere sul fatto che

$$(x + \epsilon, a x^2 + b x + c + \epsilon)$$

NON appartiene al grafico di $y(x)$.

Importante 3. Il simbolo dx per gli infinitesimi va evitato.

3 Cubiche

Problema delle botti di Keplero (1615): trovare il punto di massimo della cubica

$$p(x) = ax^3 + bx$$

per $x \geq 0$, dove $a < 0$ e $b > 0$.

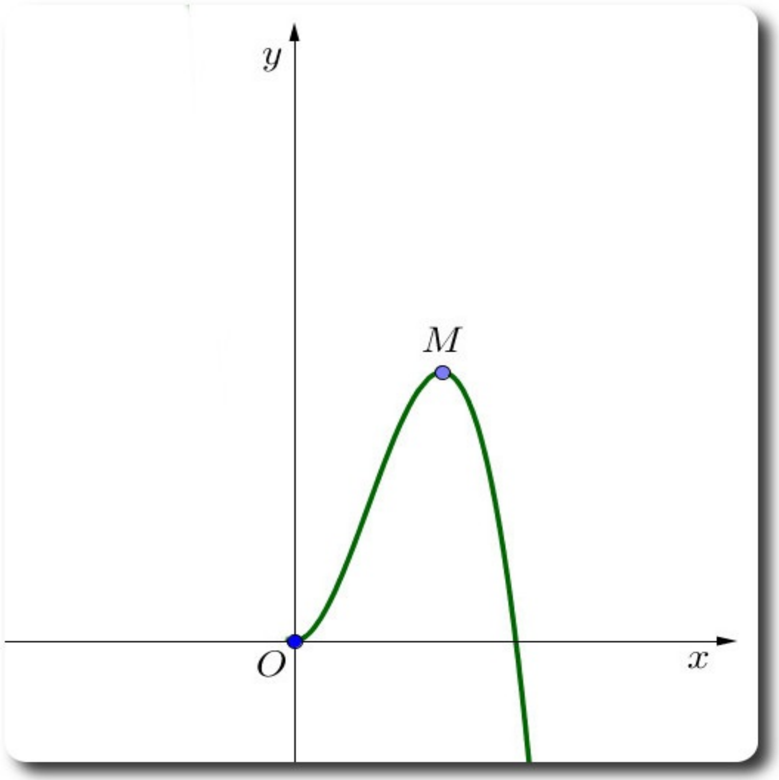

Figura 2. Grafico cubica problema di Keplero

Metodo di Fermat [2]

Sia $x > 0$ allora il punto

$$(x, p(x)) = (x, a x^3 + b x)$$

appartiene al grafico di $p(x)$.

Se ϵ è un infinitesimo non nullo, il punto

$$(x+\epsilon, p(x+\epsilon)) = (x+\epsilon, a(x+\epsilon)^3 + b(x+\epsilon))$$

è un punto del grafico di $p(x)$ "vicino" al primo.

Ora la differenza

$$\Delta p(x) = p(x+\epsilon) - p(x) = (3a x^2 + b)\epsilon + 3a x\epsilon^2 + a\epsilon^3$$

è infinitesima e se si divide per ϵ si ha

$$\frac{\Delta p(x)}{\epsilon} = (3a x^2 + b) + 3a x\epsilon + a\epsilon^2.$$

Il punto di massimo x_M si ottiene, secondo Fermat, come soluzione dell'equazione

$$3ax^2+b=0 \qquad \Rightarrow \qquad x_M=\sqrt{-\frac{b}{3a}}>0.$$

La conferma che trattasi di un massimo si ha osservando che

$$\Delta p(x_M)=3ax_M\epsilon^2+a\epsilon^3<0.$$

Nota 4. La condizione posta da Fermat equivale ovviamente a pendenza nulla della retta tangente al grafico della funzione nel punto di massimo... derivata prima nulla!

A questo punto del corso sono stati introdotti i termini "derivata" e "monotonia"

- derivata come sinonimo di pendenza della retta tangente
- crescenza stretta e decrescenza stretta in intervalli che corrispondo ad andamenti in salita e in discesa del del grafico

persuadendo gli studenti che in intervalli con $p'(x)>0$ c'è crescenza stretta...

In questo modo sono stati posti i fondamenti per lo studio delle cubiche.

Nel corso del terzo anno sono state studiate cubiche del tipo

$$p(x) = ax^3 + bx \qquad c(x) = ax^3 + bx^2 \qquad g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

le ultime solo nel caso in cui si potesse ricorrere al teorema di Ruffini per la determinazione degli zeri.

La formula di derivazione

$$D(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$$

è stata dimostrata.

I passaggi dallo studio della monotonia attraverso la derivata prima al grafico e viceversa dal grafico (con GeoGebra) allo studio della monotonia sono stati percorsi in entrambe le direzioni più volte.

Ma senza dimostrazione del teorema di monotonia.

Si è rimarcata la non sufficienza di derivata prima nulla per gli estremi.

4 Funzioni omografiche e infiniti

$$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad c \neq 0, ad - cb \neq 0$$

definita sul dominio naturale

$$\mathrm{dom}\, h = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

Come sempre si è partiti da **esempi semplici**, ma istruttivi.

Sia data

$$y(x) = \frac{1}{x}$$

definita in $D = \mathbb{R} - \{0\}$. Il calcolo della derivata in un punto si riduce a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\epsilon} - \frac{1}{x}}{\epsilon} = -\frac{1}{x(x+\epsilon)}$$

da cui

$$y'(x) = \mathrm{st}\left(-\frac{1}{x(x+\epsilon)}\right) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

per ogni $x \in D$.

Si conclude che la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

La funzione **non** è strettamente decrescente in D.

A questo punto è stato introdotto il concetto di asintoto verticale e orizzontale

Se $\epsilon > 0$ è un infinitesimo allora $\omega = 1/\epsilon$ è un numero iperreale infinito e positivo e

$$h(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \approx \frac{a\omega}{c\omega} = \frac{a}{c}$$

da cui si ha che la retta di equazione $y = a/c$ è asintoto orizzontale destro per $h(x)$.

Ma $h(-\omega) = h(\omega)$ quindi $y = a/c$ è anche asintoto orizzontale sinistro per $h(x)$.

In modo simile, per l'asintoto verticale si osserva che

$$h\left(-\frac{d}{c} + \epsilon\right) = \frac{-\frac{ad}{c} + a\epsilon + b}{c\epsilon}$$

che è sempre un infinito (si tratta solo di stabilire il suo segno).

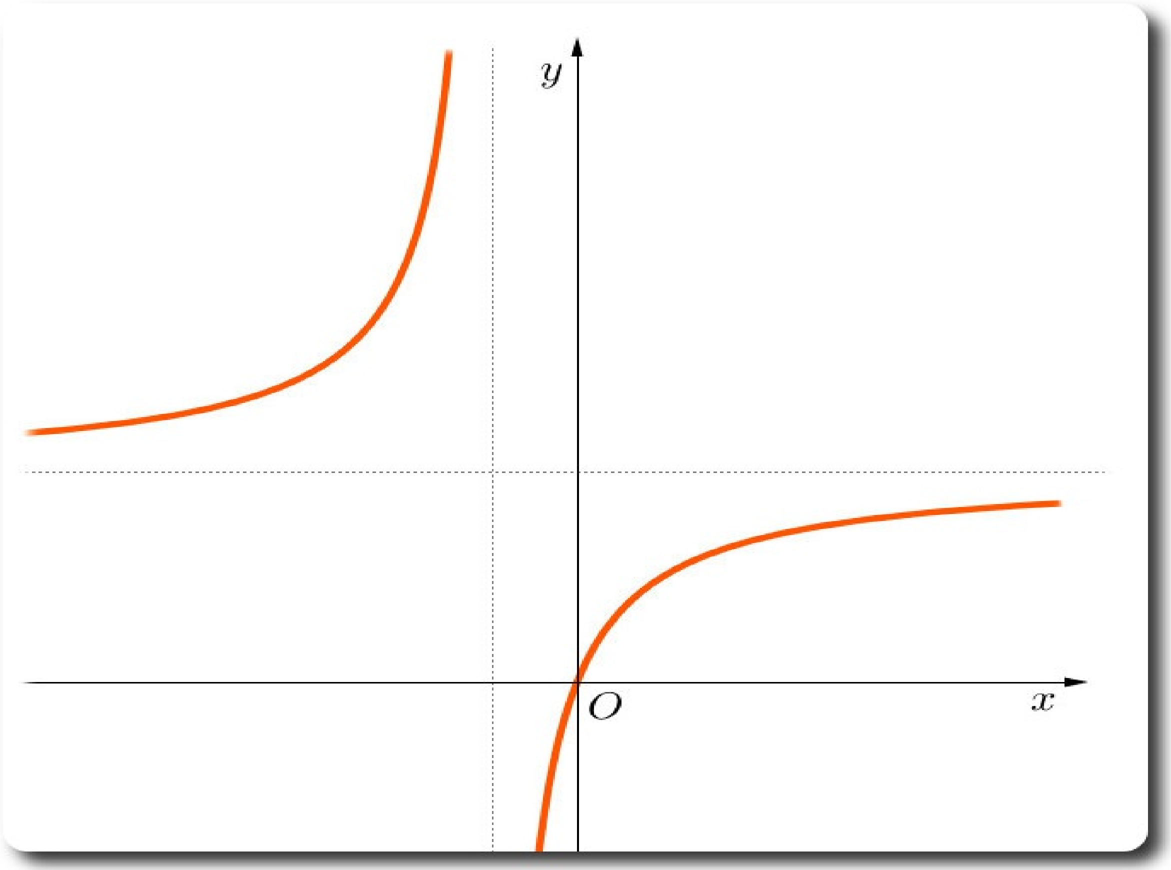

Figura 3. Iperbole equilatera e asintoti

Per gli esercizi è stata usata la formula (non ricavata in generale)

$$h'(x) = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}.$$

Conclusioni

a) l'introduzione di elementi di NSA al terzo anno di corso non presenta particolari difficoltà concettuali per gli studenti;

b) la NSA permette di riabilitare in modo efficace il registro grafico per lo studio di zero e segno delle funzioni polinomiali di terzo grado e delle funzioni omografiche;

c) agli studenti sono state date delle dispense ma servirebbe un libro completo di matematica per il terzo anno (un libro piccolo) con elementi NSA;

d) gli elementi di NSA introdotti in terza possono essere fruttuosamente utilizzati anche al IV anno di corso nello studio delle funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche;

Bibliografia essenziale

[1] Indicazioni Nazionali per i licei disponibili online `nuovilicei.indire.it`

[2] M.G. Katz, D.M. Schaps, S. Shnider (2013), Almost equal: the method of adequality from Diophantus to Fermat and beyond, Perspectives on sciences, 21 (3), pag. 283 – 324.