Confronto tra dimostrazioni standard e non standard di teoremi sulle funzioni continue

VI giornata di analisi non standard

Daniele Zambelli

Liceo Scientifico Girolamo Fracastoro

2016

Piano della presentazione I

La mia esperienza

Usare l'approccio non standard non vuol dire stravolgere tutto ciò che si insegna.

1. Tutto l'apparato di esercizi presenti nei testi rimane utilizzabile.
2. Il tempo dedicato ai limiti è pochissimo, mentre bisogna prevedere un tempo adeguato per introdurre e lavorare sugli Iperreali.
3. Alcuni teoremi hanno dimostrazioni che si discostano notevolmente da quelli tradizionali, altri si dimostrano in modo molto simile o identico.

In questa presentazione affronterò quest'ultimo punto.

La mia esperienza

Usare l'approccio non standard non vuol dire stravolgere tutto ciò che si insegna.

1. Tutto l'apparato di esercizi presenti nei testi rimane utilizzabile.
2. Il tempo dedicato ai limiti è pochissimo, mentre bisogna prevedere un tempo adeguato per introdurre e lavorare sugli Iperreali.
3. Alcuni teoremi hanno dimostrazioni che si discostano notevolmente da quelle tradizionali, altri si dimostrano in modo molto simile o identico.

In questa presentazione affronterò quest'ultimo punto.

La mia esperienza

Usare l'approccio non standard non vuol dire stravolgere tutto ciò che si insegna.

1. Tutto l'apparato di esercizi presenti nei testi rimane utilizzabile.
2. Il tempo dedicato ai limiti è pochissimo, mentre bisogna prevedere un tempo adeguato per introdurre e lavorare sugli Iperreali.
3. Alcuni teoremi hanno dimostrazioni che si discostano notevolmente da quelle tradizionali, altri si dimostrano in modo molto simile o identico.

In questa presentazione affronterò quest'ultimo punto.

La mia esperienza

Usare l'approccio non standard non vuol dire stravolgere tutto ciò che si insegna.

1. Tutto l'apparato di esercizi presenti nei testi rimane utilizzabile.
2. Il tempo dedicato ai limiti è pochissimo, mentre bisogna prevedere un tempo adeguato per introdurre e lavorare sugli Iperreali.
3. Alcuni teoremi hanno dimostrazioni che si discostano notevolmente da quelle tradizionali, altri si dimostrano in modo molto simile o identico.

In questa presentazione affronterò quest'ultimo punto.

La mia esperienza

Usare l'approccio non standard non vuol dire stravolgere tutto ciò che si insegna.

1. Tutto l'apparato di esercizi presenti nei testi rimane utilizzabile.
2. Il tempo dedicato ai limiti è pochissimo, mentre bisogna prevedere un tempo adeguato per introdurre e lavorare sugli Iperreali.
3. Alcuni teoremi hanno dimostrazioni che si discostano notevolmente da quelle tradizionali, altri si dimostrano in modo molto simile o identico.

In questa presentazione affronterò quest'ultimo punto.

La mia esperienza

Usare l'approccio non standard non vuol dire stravolgere tutto ciò che si insegna.

1. Tutto l'apparato di esercizi presenti nei testi rimane utilizzabile.
2. Il tempo dedicato ai limiti è pochissimo, mentre bisogna prevedere un tempo adeguato per introdurre e lavorare sugli Iperreali.
3. Alcuni teoremi hanno dimostrazioni che si discostano notevolmente da quelle tradizionali, altri si dimostrano in modo molto simile o identico.

In questa presentazione affronterò quest'ultimo punto.

Di cosa NON parlerò

1. dei numeri Iperreali (su questi qualcosa dirò);
2. di esercizi da risolvere con la NSA;
3. della soluzione di problemi con la NSA;
4. di tante altre cose.

Potrete pormi in ogni momento delle domande alle quali risponderò . . . se ne sarò capace.

Di cosa NON parlerò

1. dei numeri Iperreali (su questi qualcosa dirò);
2. di esercizi da risolvere con la NSA;
3. della soluzione di problemi con la NSA;
4. di tante altre cose.

Potrete pormi in ogni momento delle domande alle quali risponderò ...se ne sarò capace.

Di cosa NON parlerò

1. dei numeri Iperreali (su questi qualcosa dirò);
2. di esercizi da risolvere con la NSA;
3. della soluzione di problemi con la NSA;
4. di tante altre cose.

Potrete pormi in ogni momento delle domande alle quali risponderò . . . se ne sarò capace.

Di cosa NON parlerò

1. dei numeri Iperreali (su questi qualcosa dirò);
2. di esercizi da risolvere con la NSA;
3. della soluzione di problemi con la NSA;
4. di tante altre cose.

Potrete pormi in ogni momento delle domande alle quali risponderò . . . se ne sarò capace.

Metodi uguali

Tutto quanto riguarda:

1. i calcoli sulle derivate;
2. lo studio dell'andamento di una funzione;
3. la ricerca dei punti stazionari;
4. lo studio della concavità.

può essere svolto allo stesso modo nei due approcci.

Metodi uguali

Tutto quanto riguarda:

1. i calcoli sulle derivate;
2. lo studio dell'andamento di una funzione;
3. la ricerca dei punti stazionari;
4. lo studio della concavità.

può essere svolto allo stesso modo nei due approcci.

Metodi uguali

Tutto quanto riguarda:

1. i calcoli sulle derivate;
2. lo studio dell'andamento di una funzione;
3. la ricerca dei punti stazionari;
4. lo studio della concavità.

può essere svolto allo stesso modo nei due approcci.

Piccole differenze

Le cose incominciano a cambiare quando si scende a definizioni o teoremi di livello un po' più basso.

1. Il teorema di Lagrange poggia sul
2. teorema di Rolle che poggia sul
3. teorema di Fermat

Dato che la dimostrazione standard di questo teorema si basa sui limiti, quella non standard risulta leggermente diversa.

Piccole differenze

Le cose incominciano a cambiare quando si scende a definizioni o teoremi di livello un po' più basso.

1. Il teorema di Lagrange poggia sul
2. teorema di Rolle che poggia sul
3. teorema di Fermat

Dato che la dimostrazione standard di questo teorema si basa sui limiti, quella non standard risulta leggermente diversa.

Piccole differenze

Le cose incominciano a cambiare quando si scende a definizioni o teoremi di livello un po' più basso.

1. Il teorema di Lagrange poggia sul
2. teorema di Rolle che poggia sul
3. teorema di Fermat

Dato che la dimostrazione standard di questo teorema si basa sui limiti, quella non standard risulta leggermente diversa.

Esempio: teorema di Fermat

Il teorema dice:

Teorema di Fermat

Se una funzione è definita in un intervallo chiuso, ha un massimo (minimo) relativo in un punto interno all'intervallo e in quel punto è derivabile, allora in quel punto ha derivata nulla.

Fermat: Standard vs Non Standard

Standard

$$f'_+(x) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

$$f'_-(x) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

Non Standard

$$f'_+(c) = \mathrm{st}\left(\frac{f(c+\delta) - f(c)}{\delta}\right) \leqslant 0$$

$$f'_-(c) = \mathrm{st}\left(\frac{f(c+\delta) - f(c)}{\delta}\right) \geqslant 0$$

Fermat: osservazioni (1)

Il filo logico è lo stesso, le differenze riguardano la definizione di derivata.
Nella dimostrazione Standard si usano i limiti e la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.

Il risultato ottenuto è conseguenza dell'applicazione di svariati teoremi (nell'esempio: il limite di un rapporto è il rapporto tra i limiti, la differenza al numeratore è il limite delle differenze. . .).

Nell'analisi non standard non abbiamo bisogno di limiti e la derivata è definita come applicazione della **parte standard** al risultato di un calcolo algebrico.

Fermat: osservazioni (1)

Il filo logico è lo stesso, le differenze riguardano la definizione di derivata.
Nella dimostrazione Standard si usano i limiti e la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.

Il risultato ottenuto è conseguenza dell'applicazione di svariati teoremi (nell'esempio: il limite di un rapporto è il rapporto tra i limiti, la differenza al numeratore è il limite delle differenze. . .).

Nell'analisi non standard non abbiamo bisogno di limiti e la derivata è definita come applicazione della **parte standard** al risultato di un calcolo algebrico.

Fermat: osservazioni (1)

Il filo logico è lo stesso, le differenze riguardano la definizione di derivata.
Nella dimostrazione Standard si usano i limiti e la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.

Il risultato ottenuto è conseguenza dell'applicazione di svariati teoremi (nell'esempio: il limite di un rapporto è il rapporto tra i limiti, la differenza al numeratore è il limite delle differenze. . .).

Nell'analisi non standard non abbiamo bisogno di limiti e la derivata è definita come applicazione della **parte standard** al risultato di un calcolo algebrico.

Fermat: osservazioni (2)

Nella soluzione con la NSA si passa dai Reali agli Iperreali quando l'opportuno valore Δ diventa un qualsiasi infinitesimo δ poi si ritorna ai Reali nel calcolo della derivata usando la funzione **parte standard**.

La differenza in superficie è piccola, ma non lo è se si considera tutto quanto viene dato per acquisito.

Fermat: osservazioni (2)

Nella soluzione con la NSA si passa dai Reali agli Iperreali quando l'opportuno valore Δ diventa un qualsiasi infinitesimo δ poi si ritorna ai Reali nel calcolo della derivata usando la funzione **parte standard**.

La differenza in superficie è piccola, ma non lo è se si considera tutto quanto viene dato per acquisito.

Continuità

Diremo che una funzione è **continua** in un punto c, se:

Standard

- è definita in c e
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Non Standard

- è definita in c e
- $\forall x \, (x \approx c) \Rightarrow (f(x) \approx f(c))$

Dove "$\approx$" significa "infinitamente vicino".

Continuità

Diremo che una funzione è **continua** in un punto c, se:

Standard

- è definita in c e
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Non Standard

- è definita in c e
- $\forall x \, (x \approx c) \;\Rightarrow\; (f(x) \approx f(c))$

Dove "$\approx$" significa "infinitamente vicino".

Continuità osservazione

Nell'analisi non standard la definizione diventa:

Definizione

"Quando x è infinitamente vicino a c
allora $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(c)$".

Chi conosce l'analisi può osservare che i due approcci sono molto simili, il primo fa uso del concetto di **limite**, concetto piuttosto complicato da imparare, il secondo fa uso del concetto di **infinitamente vicino**, concetto molto più immediato.

Continuità osservazione

Nell'analisi non standard la definizione diventa:

Definizione

"Quando x è infinitamente vicino a c
allora $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(c)$".

Chi conosce l'analisi può osservare che i due approcci sono molto simili, il primo fa uso del concetto di **limite**, concetto piuttosto complicato da imparare, il secondo fa uso del concetto di **infinitamente vicino**, concetto molto più immediato.

Diversità radicali

Più ci si allontana dai risultati più complessi e ci si abbassa verso i fondamenti della teoria, più le strade divergono, vediamo alcuni esempi.

Limite

Non riporto qui la definizione di limite dell'analisi standard, perché penso sia ben nota a chi insegna alle superiori (un po' meno a chi impara). È una definizione in cui si parte dall'asse y ci si sposta sull'asse x e si ritorna all'asse y mescolando nel giusto ordine i quantificatori $\exists$ e $\forall$.

Osservazione

In NSA non c'è bisogno dei limiti, ma qualche volta è comodo poter usare la notazione e il concetto di limite. Può essere utile quindi dare la sua definizione anche in NSA.

Limite in NSA

La definizione di limite nella NSA non assomiglia affatto a quella dell'analisi standard, è diversa concettualmente. Il limite è definito utilizzando l'idea di infinitamente vicino ($\approx$):

$$l = \lim_{x \to c} f(x) \Leftrightarrow \forall x \left((x \approx c \wedge x \neq c) \Rightarrow (f(x) \approx l) \right)$$

e il calcolo di un limite si riduce a calcolare il risultato di un'espressione algebrica tra numeri Iperreali.

Ad esempio il limite per x che tende a zero è la parte standard del valore della funzione calcolata per x infinitesimo.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \mathrm{st}\left(f(\varepsilon)\right)$$

Limite in NSA

La definizione di limite nella NSA non assomiglia affatto a quella dell'analisi standard, è diversa concettualmente. Il limite è definito utilizzando l'idea di infinitamente vicino ($\approx$):

$$l = \lim_{x \to c} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall x\,((x \approx c \wedge x \neq c) \Rightarrow (f(x) \approx l))$$

e il calcolo di un limite si riduce a calcolare il risultato di un'espressione algebrica tra numeri Iperreali.
Ad esempio il limite per x che tende a zero è la parte standard del valore della funzione calcolata per x infinitesimo.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \operatorname{st}(f(\varepsilon))$$

Limite un esempio

Vediamo un esempio.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x}{5x^2+3x} = \mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon^3-2\varepsilon}{5\varepsilon^2+3\varepsilon}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{-2\cancel{\varepsilon}}{3\cancel{\varepsilon}}\right) = -\frac{2}{3}$$

Il passaggio chiave è quello centrale e richiede una certa attenzione. Il numeratore è un infinitesimo ed è ovviamente infinitamente vicino ad ogni altro infinitesimo.
Posso sostituire un infinitesimo con un altro infinitesimo solo se sono indistinguibili (simbolo: $\sim$).

Limite un esempio

Vediamo un esempio.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x}{5x^2 + 3x} = \mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon^3 - 2\varepsilon}{5\varepsilon^2 + 3\varepsilon}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{-2\cancel{\varepsilon}}{3\cancel{\varepsilon}}\right) = -\frac{2}{3}$$

Il passaggio chiave è quello centrale e richiede una certa attenzione. Il numeratore è un infinitesimo ed è ovviamente infinitamente vicino ad ogni altro infinitesimo.
Posso sostituire un infinitesimo con un altro infinitesimo solo se sono indistinguibili (simbolo: $\sim$).

Limite un esempio

Vediamo un esempio.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x}{5x^2+3x} = \mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon^3-2\varepsilon}{5\varepsilon^2+3\varepsilon}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{-2\cancel{\varepsilon}}{3\cancel{\varepsilon}}\right) = -\frac{2}{3}$$

Il passaggio chiave è quello centrale e richiede una certa attenzione. Il numeratore è un infinitesimo ed è ovviamente infinitamente vicino ad ogni altro infinitesimo.
Posso sostituire un infinitesimo con un altro infinitesimo solo se sono indistinguibili (simbolo: $\sim$).

Limite un esempio

Vediamo un esempio.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x}{5x^2 + 3x} = \mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon^3 - 2\varepsilon}{5\varepsilon^2 + 3\varepsilon}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{-2\cancel{\varepsilon}}{3\cancel{\varepsilon}}\right) = -\frac{2}{3}$$

Il passaggio chiave è quello centrale e richiede una certa attenzione. Il numeratore è un infinitesimo ed è ovviamente infinitamente vicino ad ogni altro infinitesimo.
Posso sostituire un infinitesimo con un altro infinitesimo solo se sono indistinguibili (simbolo: $\sim$).

infinitamente vicino vs indistinguibile

Osservazione

La relazione tra **infinitamente vicino** e **indistinguibile** è uno dei punti da chiarire bene quando si trattano gli Iperreali.

Opportunità

Trattando il limite semplicemente come il calcolo di un'espressione negli Iperreali, ho potuto far calcolare "limiti" già nella classe terza dopo aver introdotto i numeri Iperreali.

infinitamente vicino vs indistinguibile

Osservazione

La relazione tra **infinitamente vicino** e **indistinguibile** è uno dei punti da chiarire bene quando si trattano gli Iperreali.

Opportunità

Trattando il limite semplicemente come il calcolo di un'espressione negli Iperreali, ho potuto far calcolare "limiti" già nella classe terza dopo aver introdotto i numeri Iperreali.

Principio di transer

Osservazione

Per i prossimi teoremi, relativi alle funzioni continue, sono necessari due strumenti della NSA: Il principio di Tranfer e i numeri Ipernaturali.

Il principio di tranfer

Ogni affermazione che è valida per una o più funzioni reali ha un'interpretazione che la rende valida anche per funzioni Iperreali.

Ipernaturali

Definizione

Keisler definisce l'insieme degli **Iperinteri** come quel sottoinsieme degli Iperreali per cui ogni elemento è uguale alla sua parte intera: $x = [x]$ e l'insieme degli **Ipernaturali** è formato dagli Iperinteri non negativi.

Osservazione

Ma ogni sottoinsieme numerico ha una sua estensione non standard quindi è possibile costruire gli Ipernaturali, gli Iperinteri, e così via, senza utilizzare la parte intera degli Iperreali.

Teorema degli zeri

Anche il teorema degli zeri in NSA sfrutta una suddivisione dell'intervallo in infiniti sottointervalli:

Teorema degli zeri

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[a;\ b]$ e agli estremi dell'intervallo assume valori di segno opposto allora la funzione ha uno zero nell'intervallo aperto $]a;\ b[$.

Ipotesi:

1. f è definita e continua nell'intervallo chiuso $[a;\ b]$;
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$

Tesi:

$$\exists\ c \in\ ]a;\ b[\ \text{tale che } f(c) = 0$$

Teorema degli zeri NSA (1)

Supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, posto H un Ipernaturale infinito, dividiamo l'intervallo iperreale $[a;\ b]$ in H parti uguali

$$a;\ a+\delta;\ a+2\delta;\ \dots;\ a+j\delta;\ \dots;\ a+H\delta = b$$

Chiamiamo k l'indice per il quale:

$$f(a+k\delta) \leqslant 0 < f(a+(k+1)\delta)$$

Dato che f è continua:

$$a+k\delta \approx a+(k+1)\delta \quad \Rightarrow \quad f(a+k\delta) \approx f(a+(k+1)\delta)$$

Teorema degli zeri NSA (2)

Ma l'unico numero standard che è infinitamente vicino ad un numero minore di zero e anche ad un numero maggiore di zero è zero.
Quindi chiamando: $c = \mathrm{st}\,(a + k\delta) = \mathrm{st}\,(a + (k+1)\delta)$

$$f(c) = f(\mathrm{st}\,(a + k\delta)) = \mathrm{st}\,(f(a + k\delta)) = 0$$

In modo analogo si dimostra il caso in cui $f(a) > 0 > f(b)$.

Conclusione (1)

Il passaggio dall'insegnamento dell'analisi tradizionale alla NSA non comporta necessariamente uno stravolgimento di problemi, metodi e dimostrazioni.
Risulta abbastanza indolore per noi insegnanti se abbiamo ben chiari alcuni concetti fondamentali di questo nuovo modo di affrontare l'analisi matematica.

Conclusione (2)

Per passare all'analisi non standard l'insegnante deve fare un lavoro di ricerca, aggiornamento e adattamento di materiali, ma ne vale la pena.

Lo sforzo per il cambiamento è compensato dalla possibilità di:

- comunicare una visione altrettanto rigorosa, ma più intuitiva;
- iniziare all'uso di uno strumento estremamente potente.

Conclusione (2)

Per passare all'analisi non standard l'insegnante deve fare un lavoro di ricerca, aggiornamento e adattamento di materiali, ma ne vale la pena.

Lo sforzo per il cambiamento è compensato dalla possibilità di:

- comunicare una visione altrettanto rigorosa, ma più intuitiva;
- iniziare all'uso di uno strumento estremamente potente.

Conclusione (3)

Gli strumenti per farlo, non possono essere forniti dalle case editrici.
Ma tutto quello che serve lo si può trovare in rete.
Buona parte di questi materiali è rilasciata con una licenza libera che permette loro di evolvere e di essere tradotti o adattati per diverse esigenze.

link

Tra i tantissimi link ne segnalo alcuni:

www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

nsa.readthedocs.io

mathesisverona.it/Numeri/Nume205.pdf

bitbucket.org/zambu/matematicadolce/downloads

Grazie per l'attenzione.

link

Tra i tantissimi link ne segnalo alcuni:

www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

nsa.readthedocs.io

mathesisverona.it/Numeri/Nume205.pdf

bitbucket.org/zambu/matematicadolce/downloads

Grazie per l'attenzione.